УДК 514.74

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ФАЛЕСА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Одним из основополагающих утверждений школьного курса математики является утверждение о пропорциональности отрезков, отсекаемых параллельными прямыми на заданных прямых. В случае, когда длины отсекаемых отрезков равны, это утверждение называется теоремой Фалеса. Оно справедливо и в общем случае, но доказать его средствами классической геометрии довольно трудно. В частности, в известном школьном учебнике Погорелова приведено доказательство, сопровождаемое примечанием “не для запоминания”. В данной работе мы показываем, как можно существенно упростить изложение материала, относящегося к теореме Фалеса, используя инструменты аналитической геометрии.

Ключевые слова: алгебра; геометрия; синергия; теорема Фалеса; подобные треугольники.

ФАЛЕСТИН ТЕОРЕМАСЫНЫН АЙЛАНАСЫНДА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Мектеп математикасынын негизги түшүнүктөрүнүн бири бул параллель түз сызыктар менен кесилген кесиндилердин пропорционалдуулугу. Кесиндилер бири-бирине барабар болгон учурду Фалестин теоремасы деп аташат. Аны классикалык геометриянын каражаттары менен далилдөө бир кыйла татаал нерсе. Мисалы, Погореловдун кеңири таралган Геометрия китебинде «эске сактоо үчүн эмес» деген сөздөр менен коштолгон далилдөө келтирилген. Бул эмгекте, биз аналитикалык геометриянын ыкмаларын колдонсок, Фалестин теоремасына тиешелүү көп маселе жөнөкөйлөшүү мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн.

Түйүндүү сөздөр: алгебра; геометрия; синергия; Фалес теоремасы; окшош үч бурчтуктар.

AROUND THE THALES THEOREM

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, E.S. Burova

One of the fundamental statements of the school course of mathematics is the statement about the proportionality of the segments, cut off by parallel lines on the given straight lines. In the case when the lengths of the cut segments are equal, this statement is called the Thales theorem. It is also valid in the general case, but it is rather difficult to prove it by means tools of classical geometry. In particular, the proof in the well-known Russian school textbook Pogorelov, accompanied by a note “not for memorization”. In this paper, we show how to significantly simplify the presentation of the material relating to the theorem of Thales, using the tools of analytical geometry.

Keywords: algebra; geometry; synergy; Thales theorem; similar triangles.

1. Около четырех столетий назад на свет появилась Аналитическая геометрия, “официально” использующая алгебраические методы для решения геометрических задач. Эффективность методов аналитической геометрии сразу оценили выдающиеся математики. В числе тех, кто сделал значительный вклад в ее развитие, значатся Ньютон, Клеро, Эйлер, Лагранж и многие другие. Мы полагаем, что эффект синергии, возникающий при объединении методов алгебры и геометрии, в полной мере не используется. Одна из причин, по нашему мнению, заключается в отсутствии соответствующих методических материалов. Надеемся, что данная работа в определенной степени восполнит этот пробел.

Начнем разговор со следующей задачи:

Две прямые $y = 0,75x$ *и* $y = 25 - 0,5x$ *пересечены прямыми* $y = 0,$ $y = 3,$ $y = 9$ в точках O, A, B на $y = 0,75x$ и *в* соответствующих им точках F, E, D на $y = 25 - 0,5x$. Сравните отношение длин отрезков OA и AB с отношением длин отрезков FE и ED.

Решение. Решив уравнения $3 = 0,75x$ и $3 = 25 - 0,5x$, получим координаты точек $A(4;3)$ и $E(44;3)$. Также можно получить координаты и остальных точек: $B(12;9), D(32;9), F(50;0)$ (рисунок 1).

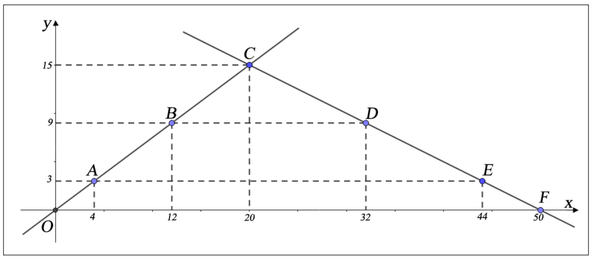

Рисунок 1 – Пересечение параллельными прямыми

Тогда, $|OA| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$;

$|AB| = \sqrt{(12-4)^2 + (9-3)^2} = 10;$

$|FE| = \sqrt{(50-44)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{45};$

$|ED| = \sqrt{(32-44)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{180};$

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \frac{|FE|}{|ED|} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{4 \cdot 45}} = \frac{1}{2}.$$

Итак, выяснилось, что отношения одинаковы. «Что в этом особенного?» – скажет скептически настроенный коллега. Более внимательные коллеги могут увидеть в этой задаче иллюстрацию к теореме Фалеса [1]. (Небольшая историческая справка приведена в конце данной статьи.) Расширим эту задачу, и проиллюстрируем основное свойство подобных треугольников. Напомним, *что два треугольника, у которых соответствующие углы одинаковы, называются подобными.*

В условиях предыдущей задачи сравните отношение длин соответствующих сторон треугольников *ACE* и *BCD*, где *C* – точка пересечения прямых $y = 0,75x$ и $y = 25 - 0,5x$.

Решение. Решив уравнение $0,75x = 25 - 0,5x$, получим координаты точки $C(20;15)$. Затем, вычислим длины сторон треугольников:

$|AC| = \sqrt{(20-4)^2 + (15-3)^2} = 20;$

$|CE| = \sqrt{(20-44)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{720};$

$|AE| = 44 - 4 = 40;$

$|BC| = \sqrt{(20-12)^2 + (15-9)^2} = 10;$

$|CD| = \sqrt{(20-32)^2 + (15-9)^2} = \sqrt{180};$

$|BD| = 32 - 12 = 20.$

Осталось определить отношения длин сторон треугольников:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{20}{10} = 2; \frac{|CE|}{|ED|} = \frac{\sqrt{720}}{\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 180}}{\sqrt{180}} = 2;$$

$$\frac{|AE|}{|BD|} = \frac{40}{20} = 2.$$

Итак, показано, что отношения длин сторон подобных треугольников одно и то же.

2. Результаты этих рассуждений позволяют достаточно просто разобраться в следующих основополагающих утверждениях из курса планиметрии – обобщенной теореме Фалеса и основном свойстве подобных треугольников.

Параллельные прямые, пересекающие две любые прямые, отсекают от этих прямых пропорциональные отрезки.

Отношения длин сторон подобных треугольников одно и то же для всех сторон.

Итак, рассмотрим прямые *m* и *l*, которые пересекаются параллельными между собой прямыми *p, q, r* (рисунок 2).

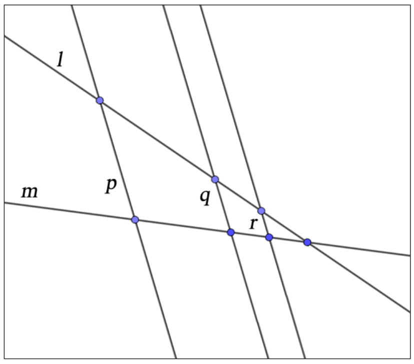

Рисунок 2 – Теорема Фалеса

Мы получим ситуацию, рассмотренную выше, если расположим прямую *p* на оси *OX* так, чтобы прямая *l* проходила через начало координат (рисунок 3) [2, с. 3–16].

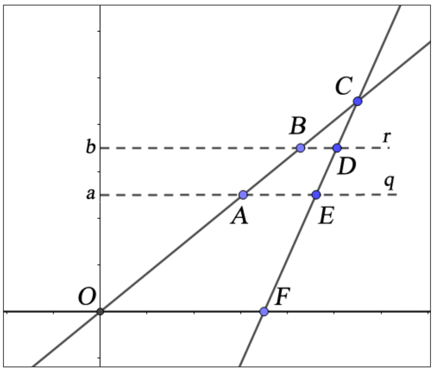

Рисунок 3 – Координатное представление теоремы Фалеса

Тогда, прямая l будет описываться уравнением: $y = kx$, а прямая m – уравнением $y = nx + t$, где k, n, t – произвольные числа. Предполагаем, что расстояние между прямыми p и q равно a, а расстояние между прямыми p и r равно b.

Для того чтобы определить координаты точек A и E, решим уравнения $a = kx$ и $a = nx + t$: $A\left(\frac{a}{k}; a\right)$ и $E\left(\frac{a-t}{n}; a\right)$. Также можно получить координаты и остальных точек: $B\left(\frac{b}{k}; b\right)$, $D\left(\frac{b-t}{n}; b\right)$, $F\left(\frac{-t}{n}; 0\right)$.

Тогда $|OA| = \sqrt{\left(\frac{a}{k}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1}$;

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{b}{k} - \frac{a}{k}\right)^2 + (b - a)^2} = \sqrt{\frac{1}{k^2}(b-a)^2 + (b-a)^2} =$$

$$= (b-a)\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1};$$

$$|FE| = \sqrt{\left(-\frac{t}{n} - \frac{a-t}{n}\right)^2 + (0-a)^2} = \sqrt{\left(-\frac{a}{n}\right)^2 + (-a)^2} =$$

$$= a\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1};$$

$$|ED| = \sqrt{\left(\frac{b-t}{n} - \frac{a-t}{n}\right)^2 + (b-a)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}(b-a)^2 + (b-a)^2} = (b-a)\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1}.$$

Таким образом, так как $\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{a}{b-a}$; $\frac{|FE|}{|ED|} = \frac{a}{b-a}$; утверждение о пропорциональности отсекаемых отрезков доказано. Следует отметить важное обстоятельство: числа a и b могут принимать любые значения. Дело в том, что в официальном российском учебнике А.В. Погорелова [3], с оговоркой *не для запоминания*, для случая, когда отношение a и b является иррациональным числом, приведено далеко не простое доказательство этого утверждения.

Почти так же, как и в предыдущем примере, можно получить *доказательство основного свойства подобных треугольников в общем виде.*

Решение. Решив уравнение $kx = nx + t$, получим координаты точки $C\left(\frac{t}{k-n}; \frac{kt}{k-n}\right)$. Затем вычислим длины сторон треугольников:

$$|AC| = \sqrt{\left(\frac{t}{k-n} - \frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{kt}{k-n} - a\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2\left(\frac{kt}{k-n} - a\right)^2 + \left(\frac{kt}{k-n} - a\right)^2} = \left(\frac{kt}{k-n} - a\right)\sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 1};$$

$$|CE| = \sqrt{\left(\frac{t}{k-n} - \frac{a-t}{n}\right)^2 + \left(\frac{kt}{k-n} - a\right)^2} = \left(\frac{kt}{k-n} - a\right)\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1};$$

$$|AE| = \frac{a-t}{n} - \frac{a}{k} = \frac{ak - tk - an}{nk}.$$

Осталось определить отношения длин сторон треугольников:

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \left(\frac{kt}{k-n} - a\right) / \left(\frac{kt}{k-n} - a\right) = \frac{kt - ka + na}{kt - kb + nb};$$

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{kt - ka + na}{kt - kb + nb};$$

$$\frac{|AE|}{|BD|} = \left(\frac{ak - tk - an}{nk}\right) / \left(\frac{bk - tk - bn}{nk}\right) = \frac{kt - ka + na}{kt - kb + nb}.$$

Итак, показано, что и в общем случае отношение длин сторон подобных треугольников одно и то же.

3. Координатный подход хорош тем, что позволяет получить решение большого числа задач, используя довольно простой подход.

Проиллюстрируем это утверждение, доказав теорему о средней линии трапеции: *Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме.*

Это свойство будет легко доказано, если расположить большее основание трапеции на оси OX так, чтобы его левый конец совпал с началом координат. Тогда, второе основание будет лежать на прямой $y = 2a$, а боковые стороны на прямых, описываемых уравнением $y = kx$ и уравнением $y = nx + t$ (рисунок 4).

Мы получили ситуацию, рассмотренную в предыдущих примерах.

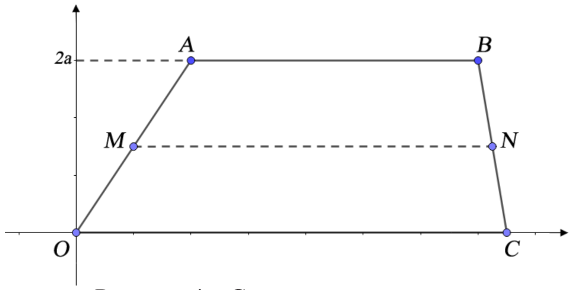

Рисунок 4 – Средняя линия трапеции

Для того чтобы определить координаты вершин трапеции A и B, решим уравнения $2a = kx$ и $2a = nx + t$: $A\left(\frac{2a}{k};2a\right)$ и $B\left(\frac{2a-t}{n};2a\right)$. Уравнение $0 = nx + t$ позволит определить координаты вершины $C\left(\frac{-t}{n};0\right)$.

Как известно, координаты середины отрезка это среднее арифметическое координат его концов. Поэтому, середина боковой стороны OA расположена в точке $M\left(\frac{a}{k};a\right)$, а боковой стороны BC – в точке $N\left(\frac{a-t}{n};a\right)$.

Следовательно, поскольку точки M и N лежат на прямой $y = a$, средняя линия трапеции параллельна основаниям, лежащим на прямых $y = 0$ и $y = 2a$.

В то же время $|OC| = \frac{-t}{n}$; (Это числовое выражение положительно.)

$$|AB| = \frac{2a-t}{n} - \frac{2a}{k} = \frac{2ak - tk - 2an}{nk};$$

$$|MN| = \frac{a-t}{n} - \frac{a}{k} = \frac{ak - tk - an}{nk}.$$

Осталось убедиться в том, что

$$\frac{|OC| + |AB|}{2} = |MN|.$$

Следствие. Частным случаем доказанного утверждения является свойство:

Средняя линия треугольника равна половине основания.

Доказательство утверждения можно получить, фактически повторив выкладки, а лучше ничего не повторять, а представить трапецию, у которой очень маленькое меньшее основание. Тогда средняя линия, практически равна половине большего основания!

4. Люция хочет измерить высоту дерева, но у нее нет нужных инструментов. Она заметила, что за деревом стоит дом и решила применить свою находчивость и знания геометрии. Она измерила расстояние от дерева до дома, результат составил 30 м, и выяснила, что высота дома составляет 10 м. Затем она встала перед деревом и начала отходить назад, пока верхний край здания стал виден над верхушкой дерева. Люция отметила это место и измерила расстояние от него до дерева. Это расстояние составило 5 м. Глаза Люции находятся на высоте 1,6 м. Повторите рассуждения Люции и определите высоту дерева (рисунок 5).

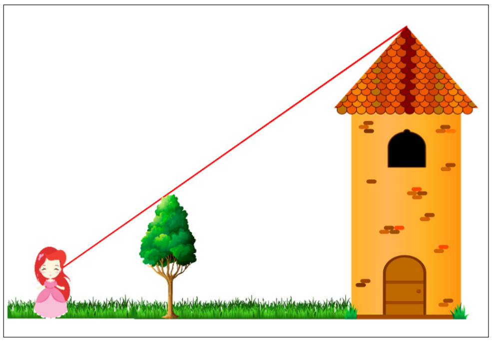

Рисунок 5 – Люция, дерево и дом

Решение. Геометрическое представление задачи показано на рисунке 6.

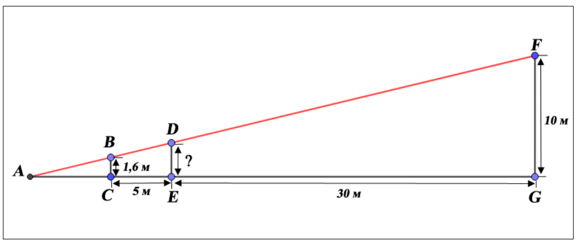

Рисунок 6 – Определение высоты дерева

Сначала мы используем подобие треугольников ΔABC и ΔAFG, и найдем длину отрезка AC:

$$\frac{BC}{FG}=\frac{AC}{AG}\Rightarrow\frac{1,6}{10}=\frac{AC}{5+30+AC}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\cdot AC=1,6\cdot(35+AC)\Rightarrow 8,4AC=$$

$$=56\Rightarrow AC=\frac{56}{8,4}=\frac{20}{3}.$$

Затем мы можем использовать подобие треугольников ΔABC и ΔADE..

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow\frac{1,6}{h}=\frac{20/3}{20/3+5}\Rightarrow 1,6\cdot\frac{20/3}{20/3+5}=$$

$$=\ h\Rightarrow h=\frac{56/3}{20/3}=2,8.$$

Итак, выяснилось, что высота дерева составляет 2,8 метра.

5. В этом пункте мы приводим небольшую историческую справку.

Фале́с – древнегреческий философ и математик из Милета (территория современной Турции). Считается основоположником греческой философии (науки). Он неизменно открывал список «семи мудрецов», заложивших основы греческой культуры и государственности

Про Фалеса передавали такую легенду (её с большой охотой повторил Аристотель). Фалеса, по причине его бедности, укоряли в бесполезности философии (науки). Тогда он, сделав по наблюдению звезд вывод о грядущем урожае маслин, ещё зимой нанял все маслодавильни в Милете и на Хиосе. Нанял он их за бесценок (потому что никто не давал больше), а когда пришла пора, и спрос на них внезапно возрос, стал отдавать их внаём по своему усмотрению. Собрав таким образом много денег, он показал, что философы при желании легко могут разбогатеть, но это не то, о чём они заботятся. Аристотель подчеркивает: урожай Фалес предсказал «по наблюдению звезд», то есть благодаря знаниям.

По рассказу Плутарха Херонейского, Фалес, будучи в Египте, поразил фараона Амасиса тем, что сумел точно установить высоту пирамиды. Фалес определил высоту пирамиды, поместив в конечной точке отбрасываемой ей тени вертикальный шест. Он знал, что тень пирамиды относится к тени шеста, как сама пирамида к шесту [4].

Заключение. Раздельное преподавание алгебры и геометрии в обычной школе – это анахронизм, которому более двух тысяч лет. Мы убеждены, что такие курсы возможны только в очень специализированных школах. При этом даже в таких случаях должно иметь место активное взаимопроникновение этих дисциплин. В наших школах, как это принято почти во всех развитых странах, должен быть единый курс – математика. Совместное применение алгебраических и геометрических методов порождает эффект синергии, обогащая и дополняя каждую дисциплину [5].

В работе представлен новый подход к теореме Фалеса, которая является основополагающей для курса тригонометрии.

Литература

1. *Шевцова Ю.В.* История математики / Ю.В. Шевцова. Саратов: Саратовский гос. ун-т. URL: http://elibrary.sgu.ru/uch_lit/1947.pdf (дата обращения: 25.05.2019).
2. *Урдалетова А.Б.* Треугольники на языке аналитической геометрии / А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев, Э.Дж. Керимкулова // Известия вузов Кыргызстана. 2018. № 6. С. 3–16.
3. *Погорелов А.В.* Геометрия. 7–9 / А.В. Погорелов. М.: Просвещение, 2014. 240 с.
4. *Фалес Милетский.* URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 25.05.2019).
5. *Кыдыралиев С.К.* Оптимизация места расположения объекта / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2012. Том 12. № 6. С. 184–188.