УДК 517.97

ЗАДАЧА ПОДВИЖНОГО ТОЧЕЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. Керимбеков, У.Э. Дуйшеналиева

Исследована задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечного подвижного источника. При этом функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления. Найдены условия оптимальности подвижного точечного управления и условия однозначной разрешимости основной и сопряженной краевых задач управляемого процесса.

Ключевые слова: функционал; оптимальное управление; условия оптимальности; краевая задача; слабо обобщенное решение.

THE PROBLEM OF MOVABLE POINT CONTROL OF ELASTIC OSCILLATIONS DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. Kerimbekov, U.E. Duyshenalieva

It was investigated the problem of optimal control of elastic oscillations, described by Fredholm integro-differential equations when oscillations occur under movable point control. Wherein the function of external influence nonlinearly depends on control. The conditions of optimality of movable point control and conditions of unique solvability of the main and conjugate boundary problems of controlled process were found.

Keywords: functional; optimal control; optimality conditions; boundary problem; weak generalized solution.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Условия оптимальности. Рассмотрим задачу минимизации обобщенного квадратичного функционала

$$I\left[u\right]=\int_0^1\left[v\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T p^2\left[t,u\left(t\right)\right]dt,\quad \beta>0. \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_{tt}=v_{xx}+\lambda\int_0^T K\left(t,\tau\right)v\left(\tau,x\right)d\tau+\delta\left(x-x_0(t)\right)f\left[t,u\left(t\right)\right],\quad \left(t,x\right)\in Q, \tag{2}$$

$$v\left(0,x\right)=\psi_1\left(x\right),\quad v_t\left(0,x\right)=\psi_2\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x\left(t,0\right)=0,\quad v_x\left(t,1\right)+\alpha v\left(t,1\right)=0,\quad 0<t\le T, \tag{4}$$

где $K\left(t,\tau\right)$ – заданная функция, она определена в области $D=\{0\le t\le 1, 0\le\tau\le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2\left(t,\tau\right)d\tau dt=K_0<\infty, \tag{5}$$

т. е. $K(t,\tau)\in H(D)$, $\xi(x)\in H(0,1)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции; $f[t,u(t)]\in H(0,T)$ – заданная функция внешнего источника, которая нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)]\ne 0,\quad \forall t\in(0,T); \tag{6}$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; $x_0(t)$ – заданная функция, которая описывает закон движения точки приложения внешней силы и принимает значения от 0 до 1; λ – параметр; T –- фиксированный момент времени, постоянная $\alpha>0$; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

При исследовании задачи оптимизации будем пользоваться понятием слабо обобщенного решения $v(t,x)\in H(Q)$ краевой задачи (2)–(6). Процедура построения слабо обобщенного решения краевой задачи будет изложена ниже. Здесь, предполагая существование единственного слабо обобщенного решения краевой задачи, соответствующего управлению $u(t)\in H(0,T)$, вычислим приращение функционала (1). Поскольку каждое управление $u(t)\in H(0,T)$ единственным образом определяет решение $v(t,x)$ краевой задачи, то управление $u(t)+\Delta u(t)\in H(0,T)$, где $\Delta u(t)$ – приращение, определяет однозначно функцию $v(t,x)+\Delta v(t,x)\in H(Q)$, где $\Delta v(t,x)$ – приращение, соответствующее приращению $\Delta u(t)$. С учетом этого обстоятельства, непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\Delta I(u)=-\int_0^1\left\{\int_0^1\delta\left(x-x_0(t)\right)\omega(t,x)dx\left[f(t,u+\Delta u)-f(t,u)\right]dt+\int_0^T\beta\left[p^2(t,u+\Delta u)-p^2(t,u)\right]dt+\right.$$
$$+\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx=-\int_0^T\Delta\Pi(\cdot,u)dt+\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx, \tag{7}$$

где

$$\Pi(\cdot,u)=\int_0^1\delta\left(x-x_0(t)\right)\omega(t,x)dx\cdot f\left(t,u(t)\right)-\beta p^2\left[t,u(t)\right]=\omega\left(t,x_0(t)\right)f\left[t,u(t)\right]-\beta p^2\left[t,u(t)\right], \tag{8}$$

а $\omega(t,x)\in H(Q)$ является единственным слабо обобщенным решением сопряженной краевой задачи, соответствующим управлению $u(t)\in H(0,T)$:

$$\omega_{tt}-\omega_{xx}=\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega(\tau,x)d\tau,\quad 0<x<1,\quad 0\le t<T, \tag{9}$$

$$\omega(T,x)=0,\ \omega_t[T,x]=2\left[v(T,x)-\xi(x)\right],\quad 0<x<1; \tag{10}$$

$$\omega_x(t,0)=0,\ \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,x)=0,\quad 0\le t<T. \tag{11}$$

Поскольку в (7) слагаемое $\int_0^1\Delta v^2(T,x)dx$ принимает неотрицательные значения, то, согласно общей схеме, можно доказать принцип максимума: для того чтобы в задаче оптимизации (1)–(6) управление $u^0(t)\in H(0,T)$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u^0(t)\right)\ \ (=)\ \ \sup_{u\in Z}\Pi\left(t,\omega^0(t,x),v^0(t,x),u\right),$$

где Z – множество допустимых значений функции $u(t)$ в каждой точке $t\in[0,T]$, выполнялось почти всюду на отрезке $[0,T]$.

Заметим, что нестрогое доказательство принципа максимума следует из неравенства

$$\Delta\Pi\left(t,\omega(t,x),v(t,x),u(t)\right)=\Pi\left(t,\cdots,u(t)+\Delta u(t)\right)-\Pi\left(t,\cdots,u(t)\right)\le 0.$$

Строгое доказательство проводится по схеме, предложенной проф. А.И. Егоровым [1]. Поскольку доказательство аналогично, приводить его не будем.

Согласно (8) как следствие принципа максимума, получим следующие соотношения:

$$\Pi_u(\cdot,u)=\omega\left(t,x_0(t)\right)f_u\left[t,u(t)\right]-2\beta p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]=0; \tag{12}$$

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\omega\left(t,x_0(t)\right)f_{uu}\left[t,u(t)\right]-2\beta\left(p^2\left[t,u(t)\right]+p\left[t,u(t)\right]p_{uu}\left[t,u(t)\right]\right)<0. \tag{13}$$

которые в совокупности называются *условиями оптимальности*.

Условия оптимальности содержат решения сопряженной краевой задачи $\omega(t,x)$. Это обстоятельство затрудняет проверку условия (13). Однако, исключив $\omega(t,x)$ из (13), его можно преобразовать к виду

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]}\right)_u > 0. \tag{14}$$

Это условие оптимальности имеет смысл при предположении существования производной второго порядка (почти всюду или обобщенной). Оно ограничивает класс функций внешних воздействий, т.е. задача оптимального управления имеет решение лишь в классе пар функций $\{f(t,u(t)),\, p(t,u(t))\}$, удовлетворяющих условию (14). Далее будем считать, что это условие выполнено для любого управления $u(t)\in H(0,T)$, т.е. оно выполняется и для оптимального управления. Тогда оптимальное управление можно находить исходя только из соотношения

$$2\beta\frac{p\left[t,u(t)\right]\cdot p_u\left[t,u(t)\right]}{f_u\left[t,u(t)\right]} = \omega\left(t,x_0(t)\right). \tag{15}$$

2. Слабо обобщенное решение основной краевой задачи. Рассмотрим краевую задачу (2)–(5), где функция $f(t,u(t))$ удовлетворяет условиям (6) и (14) при фиксированной функции управления $u(t)\in H(0,T)$.

Решение краевой задачи (2)–(6) ищем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)z_n(x), \tag{16}$$

где $z_n(x)$ является решением краевой задачи

$$z_n'' + \lambda_n^2 z_n(x) = 0. \qquad z_n'(0)=0,\ z_n'(1)+\alpha z_n(1)=0$$

и имеет вид

$$z_n(x)=\sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2+\alpha^2\right)}{\lambda_n^2+\alpha^2+\alpha}}\cos\lambda_n x,\quad n\in 1,2,3,\ldots,$$

причем система собственных функций $\{z_n(x)\}$ образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(0,1)$, числа λ_n, называемые собственными значениями, являются положительными корнями трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda=\alpha$ и удовлетворяют условиям

$$(n-1)\pi<\lambda_n<\frac{\pi}{2}(2n-1),\quad n=1,2,3,\ldots,\qquad \lambda_n\le\lambda_{n+1},\qquad \lambda_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty. \tag{17}$$

Будем пользоваться разложениями [2]:

$$\delta\left(x-x_0(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z_n\left(x_0(t)\right)z_n(x);\quad \psi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{1n}z_n(x),\quad \psi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2n}z_n(x).$$

Подставляя разложение (16) в уравнение (2), получим равенство:

$$v_n''(t)+\lambda_n^2 v_n(t)=\lambda\int_0^T K(t,\tau)v_n(\tau)d\tau+z_n\left(x_0(t)\right)f\left(t,u(t)\right). \tag{18}$$

Эти уравнения следует рассматривать совместно с начальными условиями

$$v_n(0)=\psi_{1n},\ v_n'(0)=\psi_{2n}\quad n=1,2,3,\ldots \tag{19}$$

Решение задачи Коши (18) – (19) находим по формуле:

$$v_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n t(t-\tau)\left[\lambda\int_0^T K(\tau,\eta)v_n(\eta)d\eta+z_n\left(x_0(\tau)\right)f\left(\tau,u(\tau)\right)\right]d\tau. \tag{20}$$

Таким образом, функция (16) является решением краевой задачи (2)–(6), если коэффициенты Фурье $v_n(t)$, удовлетворяет линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода (20). Такое решение назовем *слабо обобщенным решением* краевой задачи (2)–(6).

Интегральное уравнение (20) перепишем в виде

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T K_n(t,s)v_n(s)ds+a_n(t), \tag{21}$$

где ядро

$$K_n(t,s)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n t(t-\tau)K(\tau,s)d\tau; \tag{22}$$

свободный член

$$a_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t \sin\lambda_n(t-\tau)z_n(x_0(\tau))f(\tau,u(\tau))d\tau;. \tag{23}$$

Решение уравнения (21) находим по формуле [2]:

$$v_n(t)=\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n(s)ds+a_n(t), \tag{24}$$

где резольвента $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3,\dots$, определяется по формуле

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),\ n=1,2,3,\dots, \tag{25}$$

а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ удовлетворяют соотношениям:

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^T K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta,\qquad i=1,2,3,...,$$

$$K_{n,1}(t,s)=K_n(t,s),\ i=1,2,3,\dots . \tag{26}$$

Непосредственным вычислением установлена следующая оценка:

$$|K_{n,i}(t,s)|^2\le\frac{(K_0T)^{i-1}}{(2\lambda_n^2)^i}\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta,\quad i=1,2,3,\dots . \tag{27}$$

Ряд (25) сходится при значениях параметра λ, удовлетворяющих оценке $|\lambda|<\dfrac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}$.

Отсюда следует, что радиус сходимости ряда Неймана увеличивается с ростом индекса $n=1,2,3,\dots$, коэффициента Фурье. Однако ряд Неймана сходится при любом $n=1,2,3,\dots$, для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda|<\frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}, \tag{28}$$

и резольвента является непрерывной функцией по всем аргументам. Установлены следующие оценки:

$$|R_n(t,s,\lambda)|\le\frac{\sqrt{\int_0^T K^2(\eta,s)d\eta}}{\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}},\quad \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}. \tag{29}$$

Решение (24) перепишем в виде

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)z_n(x_0(\tau))f(\tau,u(\tau))d\eta\right\}z_n(x), \tag{30}$$

где

$$\psi_n(t,\lambda)=\psi_{1n}\left[\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right]+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right]; \tag{31}$$

$$\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)=\begin{cases}\sin\lambda_n t(t-\tau)+\lambda\int_\eta^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0\le\eta\le t;\\[2ex] \lambda\int_\eta^T R_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t\le\eta\le T.\end{cases} \tag{32}$$

Лемма 1. Слабообобщенное решение $v(t,x)$ краевой задачи (2)–(5) является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций $H(Q)$, т. е. $v(t,x)\in H(Q)$.

Доказательство. Используя интегральное неравенство Коши–Буняковского, непосредственным вычислением, имеем следующее неравенство:

$$\int_0^T\int_0^1 v^2(t,x)dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2(t)dt\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n^2(t,\lambda)+\frac{z_n^2(x_0)}{\lambda_n^2}\int_0^T\varepsilon_n^2(t,\eta,\lambda)d\eta\int_0^T f^2(\eta,u(\eta))d\eta\right\}dt\le$$

$$\le 2\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{4\left[\psi_{1n}^2\left(1+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\cdot\int_0^T\cos^2\lambda_n sds\right)+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\left(1+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\cdot\int_0^T\sin^2\lambda_n sds\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\lambda_n^2}\int_0^T 2\left[1+\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\cdot T\right]d\eta\cdot\left\|f(\eta,u(\eta))\right\|_{H(0,T)}^2\right\}=8\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\psi_{1n}^2+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\right)\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n^2}\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\cdot\left\|f(\eta,u(\eta))\right\|_{H(0,T)}^2\right\}\le 8T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\left\{\left\|\psi_1(x)\right\|_{H(0,1)}^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_{H(0,1)}^2+\right.$$

$$\left.+\left\|f(\eta,u(\eta))\right\|_{H(0,T)}^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\right\}\le 8T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)\left\{\left\|\psi_1(x)\right\|_{H(0,1)}^2+\frac{1}{\lambda_1^2}\left\|\psi_2(x)\right\|_{H(0,1)}^2+\right.$$

$$\left.+\left\|f(\eta,u(\eta))\right\|_{H(0,T)}^2\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right\}<\infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. Обобщенная производная $v_t(t,x)$ слабо обобщенного решения $v(t,x)$ краевой задачи (2)–(6) не является элементом гильбертова пространства квадратично суммируемых функций $H(Q)$.

Доказательство. Формально дифференцируя (16), имеем функцию:

$$v_t(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi'_{nt}(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon'_{nt}(t,\eta,\lambda)z_n(x_0(\eta))f\left[\eta,u(\eta)\right]d\eta\right\}z_n(x),$$

где

$$\psi'_n(t,\lambda)=\psi_{1n}\left[-\lambda_n\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\cos\lambda_n sds\right]+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\lambda_n\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right];$$

$$\varepsilon'_{nt}(t,\eta,\lambda)=\begin{cases}\lambda_n\cos\lambda_n(t-\eta)+\lambda\int_\eta^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & 0\le\eta\le t;\\ \lambda\int_\eta^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(s-\eta)ds, & t\le\eta\le T.\end{cases}$$

Заметим, что функция $\varepsilon'_{nt}(t,\eta,\lambda)$ терпит разрыв при $t=\eta$ со скачком, равным λ_n. Далее, непосредственным вычислением имеем соотношение:

$$\int_0^T\int_0^1 v_t^2(t,x)dxdt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left[v'_n(t)\right]^2dt=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}\left[-\lambda_n\sin\lambda_n t+\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\cos\lambda_n sds\right]+\right.$$

$$+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\lambda_n\cos\lambda_n t+\lambda\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right]+\le 3\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}^2\cdot 2\left[\lambda_n^2+\lambda^2\int_0^T R'^2_{nt}(t,s,\lambda)ds\int_0^T\cos^2\lambda_n sds\cos\lambda_n sds\right]+\right.$$

$$+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\cdot 2\left[\lambda_n^2+\lambda^2\int_0^T R'^2_{nt}(t,s,\lambda)ds\int_0^T\sin^2\lambda_n sds\cos\lambda_n sds\right]+\frac{2}{\lambda_n^2}\int_0^T\varepsilon'^2_{nt}(t,\eta,\lambda)d\eta\cdot\int_0^T f^2(\eta,u(\eta))d\eta\Bigg\}dt\le$$

$$\le\left|\int_0^T R'_{nt}(t,s,\lambda)ds\le\frac{TK_0\lambda_n^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right|\le 6\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_{1n}^2\left[\lambda_n^2+\lambda^2\frac{TK_0\lambda_n^2T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]+\frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2}\left[\lambda_n^2+\lambda^2\frac{TK_0\lambda_n^2T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\lambda_n^2}\left[\lambda_n^2+\lambda^2\frac{K_0T^2\lambda_n^2}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right]+\left\|f(\eta,u(\eta))\right\|^2_{H(0,T)}\right\}dt\le 6\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)$$

$$T\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\lambda_n^2\psi_{1n}^2+\psi_{2n}^2+z_n^2(x_0(t))\left\|f(t,u(t))\right\|^2_{H(0,T)}\right\}=6T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T^2}{\left(\lambda_1-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}\right)$$

$$\left\{\left\|\psi_1(x)\right\|^2_{H_1(0,1)}+\left\|\psi_2(x)\right\|^2_{H(0,1)}+\sum_{n=1}^{\infty}z_n^2(x_0(t))\left\|f(t,u(t))\right\|^2_{H(0,T)}\right\},$$

из которого, в силу расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}z_n^2(x_0(t))$, следует утверждение леммы, т.е. $v_t(t,x)\notin H(Q)$.

3. Слабообобщенное решение сопряженной краевой задачи.

Решение сопряженной краевой задачи (9)–(11) ищем в виде

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x),\qquad \omega_n(t)=\int_0^1\omega(t,x)z_n(x)dx, \tag{33}$$

где коэффициент Фурье $\omega_n(t)$, при каждом фиксированном n=1,2,3,..., определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\omega''_n(t)+\lambda_n^2\omega_n(t)=\lambda\int_0^T K(\tau,t)\omega_n(\tau)d\tau,\ \ \omega_n(T)=0,\ \ \omega'_n(T)=\frac{2}{\lambda_n}\left(v_n(T)-\xi_n\right),\ \ n=1,2,3,\ldots .$$

Решение этой задачи определяется как решение линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма II рода вида

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T B_n(s,t)\omega_n(s)ds+\frac{-2}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)\left[v_n(T)-\xi_n\right], \tag{34}$$

где ядро

$$B_n(s,t)=\frac{1}{\lambda_n}\int_t^T\sin\lambda_n(\tau-t)K(s,\tau)d\tau,$$

$v_n(T)$ – коэффициенты Фурье функции $v(t,x)$, вычисленные в точке $t=T$.

Решение линейного неоднородного интегрального уравнения (34) находим по формуле [3]:

$$\omega_n(t)=\lambda\int_0^T P_n(s,t,\lambda)\left(\frac{-2}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)\left[v_n(T)-\xi_n\right]\right)ds+\frac{-2}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)\left[v_n(T)-\xi_n\right], \tag{35}$$

где $P_n(s,t,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}B_{n,i}(s,t)$ – резольвента ядра $B_n(s,t)$, а $B_{n,i}(s,t)$ – повторные (итерированные) ядра, определяемые формулами:

$$B_{n,i+1}(s,t)=\int_0^T B_n(\eta,t)B_{n,i}(s,\eta)d\eta,\quad i=1,2,3,...$$

Резольвента удовлетворяет оценке

$$\int_0^T P_n^2(s,t,\lambda)ds\le\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-|\lambda|\sqrt{K_0T^2}\right)^2}. \tag{36}$$

С учетом равенств

$$v_n(T)-\xi_n=-h_n+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n(T,\eta,\lambda)z_n(x_0(\eta))f(\eta,u(\eta))d\eta; \tag{37}$$

$$z_n(x_0(t))\omega_n(t)=-2G_n(T,t,\lambda)\left[-h_n+\int_0^T E_n(T,\eta,\lambda)f(\eta,u(\eta))d\eta\right], \tag{38}$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_{1n}\left[\cos\lambda_nT+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n sds\right]-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_nT+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n sds\right],$$

$$G_n(T,t,\lambda)=\frac{z_n(x_0(t))}{\lambda_n}\left[\sin\lambda_n(T-t)+\lambda\int_0^T P_n(t,s,\lambda)\sin\lambda_n(T-s)ds\right],$$

$$E_n(T,\eta,\lambda)=\frac{1}{\lambda_n}\varepsilon_n(T,\eta,\lambda)z_n(x_0(\eta)),$$

значение решения сопряженной краевой задачи при $x=x_0(t)$ находим по формуле

$$\omega(t,x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)z_n(x_0(t))=-2\sum_{n=1}^{\infty}G_n(T,t,\lambda)\left[-h_n+\int_0^T E_n(T,\eta,\lambda)f[\eta,u(\eta)]d\eta\right]. \tag{39}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что $\omega(t,x)\in H(Q)$.

В работе получено условие оптимальности и построены слабо обобщенные решения основной и сопряженной краевых задач. Определение оптимального управления на основе равенства (15) требует дополнительных исследований.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 464 с.
2. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения / М.Л. Краснов. М.: Наука, 1975. 304 с.