УДК 517.928

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева

Предложена общая схема исследования нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на основе метода дополнительного аргумента.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных; нелинейное уравнение; интегро-дифференциальное уравнение; метод дополнительного аргумента; принцип сжимающих отображений.

SOLVING OF NON-LINEAR PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGHER ORDER BY MEANS OF THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

A.J. Ashirbaeva, E.A.Mamaziaeva

It is offered the general scheme of research of the nonlinear operator-differential equations in private derivatives of the second order on the base of the method of additional argument.

Key words: partial differential equation; non-linear equation; integro-differential equation; method of additional argument; contracting mappings principle.

Спецификой метода дополнительного аргумента является то, что один и тот же оператор применяется к функциям с различным количеством переменных. Поэтому для строгости в определениях операторов будем записывать: функция каких переменных получается; на функцию скольких переменных действует оператор (по аналогии с записью интегралов); связанные переменные в этой функции. Например:

$$F(t;u(t,\xi):\xi)=1+u(t,1/2);$$

$$G(t,;u(s,\xi):s,\xi)=t^2+u(1/4,1/2);$$

$$H(u(s,\xi):s,\xi)=\int_0^1\int_0^\infty u^2(s,\xi)d\xi ds$$ (если интеграл сходится).

Основы метода дополнительного аргумента подробно изложены в работе М.И. Иманалиева [1]. Исследованы некоторые классы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, а также систем таких уравнений; показано влияние интегральных членов для многих классов дифференциальных уравнений в частных производных, выявлены случаи, когда интегральные возмущения существенно изменяют характер проведения решений.

С использованием основных идей метода дополнительного аргумента в [2, 3] были исследованы дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения в частных производных типа Кортевега-де Фриза, а также нелинейные волновые уравнения.

П.С. Панковым, Т.М. Иманалиевым, Г.М. Кененбаевой показано, что метод дополнительного аргумента может применяться и для численного решения уравнений первого порядка. Показано преимущество метода по сравнению с методами характеристик и сеток.

В [4, 5] на основе метода дополнительного аргумента реализованы численные решения модельной задачи и задачи о движении волн Римана.

А. Асанов, Б.Э. Сулейманов также применяли метод дополнительного аргумента к исследованию существования и единственности решения обратных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В работе [6] предложена общая схема исследования нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка на основе метода дополнительного аргумента.

В данной работе рассмотрим применение метода дополнительного аргумента для нелинейного уравнения вида:

$$u_{tt}(t,x) = u\left[u(t,x)u_x(t,x)\right]_x +$$
$$+u_x(t,x)u_t(t,x) + F(t;u(t,\xi:\xi), \quad (1)$$
$$(t,x)\in G_2(T) = [0,T]\times R,$$

с начальными условиями

$$u(0,x) \ = \varphi(x), \quad (2)$$

$$\partial u(0,x)/\partial t = \psi(x)\,. \quad (3)$$

Будем использовать следующее следствие из принципа сжимающих отображений Банаха.

Лемма. Если оператор A в банаховом пространстве удовлетворяет условиям:

$$1)\quad \|A(0)\| \le c = const;\ 2)\quad \|Ax - Ay\| \le \frac{1}{2}\|x-y\|$$

в шаре $\|x\| \,''\, 2c$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Будем пользоваться обозначением:

$$p(\tau,t,x;u) = x + \int_\tau^t u(s,p(s,t,x;u))ds, \quad (4)$$
$$(\tau,t,x)\in Q_2(T) = \{0\le\tau\le t\le T,\ x\in R\}.$$

Для $p(\tau,t,x;u)$ справедливо тождество

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x;u);u) = p(\tau,\theta,x;u),$$
$$(\tau,t,\theta,x)\in Q_3(T) = \{0\le\tau\le t\le\theta\le T,\ x\in R\}.$$

Введя обозначение $v(\tau,t,x) = u(\tau,p(\tau,t,x;u))$ в (4), имеем стандартное обозначение метода дополнительного аргумента:

$$p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho) = x + \int_\tau^t v(\rho,t,x)d\rho, \quad (5)$$

и общее уравнение метода дополнительного аргумента:

$$u(t,x) = v(t,t,x) \quad (6)$$

Введем оператор

$$A(t,x;v(s,w,x):s,w) = \phi(p(0,t,x;v(s,t,x):s))$$
$$+\int_0^t (t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho$$

и следуюшее обозначение

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial x}.$$

Если имеет место равенство

$$D[-v(t,t,x)]v(\tau,t,x) = 0, \quad (7)$$

то из (5) вытекает соотношение

$$D[-v(t,t,x)]p(\tau,t,x;v) = 0\,. \quad (8)$$

Обозначим через $C^{(k)}(\Omega)$ – пространства функций, определенных и непрерывных (вместе со всеми своими производными до порядка k) на Ω.

Теорема. Если: 1) оператор F– непрерывный по первой переменной;

2) он удовлетворяет условию Липшица: существует такое $L>0$, что для любого $T^*\le T$

$$\| F(t;u_1(t,\xi):\xi) - F(t;u_2(t,\xi):\xi)$$
$$\|_{G_2(T^*)} \le L\,\| u_1(t,x) - u_2(t,x)\|_{G_2(T^*)},$$

3) $\phi(x)\in \overline{C}^{(1)}(R), \psi(x)\in C(R)$ и удовлетворяют условию $\psi(x) - \phi(x)\phi'(x) = 0$.

Тогда существует такое $T \,''\, T_*$, явно определяемое на основе исходных данных, что задачи (1)–(3) имеют ограниченное во всей области $G_2(T)$ решение $u(t,x)$, которое при $t = s$ совпадает с решением интегрального уравнения

$$v(\tau,t,x) = J(\tau,t;v(s,w,x):s,w)), \quad (9)$$

где $J(\tau,t;v(s,w,x):s,w)) = A(\tau,p(\tau,t,x;v(s,t,x):s);$ $v(s,w,x):s,w),(s,t,x)\in Q_2(T)$.

Представим основные этапы доказательства теорема в виде лемм.

Лемма 1. Существует такое $T>0$, что интегральное уравнение (9) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_2(T^*))$.

Доказательство.

Имеем при $t\le T^*\le T$:

$$|J(\tau,t;0)| = |A(\tau,p(\tau,t,x;0;0| =$$
$$= \left|\varphi(p(0,t,x;0) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;0)d\rho,\right| \le |\varphi(p(0,t,x;0)| +$$
$$+\left|\int_0^t (t-\rho)F(\rho;0)d\rho,\right| \le$$
$$\le \|\varphi\|_R + \|F(t;0)\|_{[0,T]}\,\frac{t^2}{2} \le \Omega_0(T^*),$$

где $\Omega_0(S) \equiv \|\phi\|_R + \|F(t;0)\|_{[0,T]}\,\dfrac{S^2}{2}$.

Далее, при $\tau\le t\le T^*\le T$:

$$|J(\tau,t;v_1(s,w,x):s,w)) - J(\tau,t;v_2(s,w,x):s,w))| =$$
$$|A(\tau,p(\tau,t,x;v_1(s,t,x):s);v_1(s,w,x):s,w) -$$
$$-A(\tau,p(\tau,t,x;v_2(s,t,x):s);v_2(s,w,x):s,w)| \le$$
$$\le \left|\varphi(p(0,t,x;v_1(s,t,x):s)) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;v_1(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho -\right.$$
$$\left.-\varphi(p(0,t,x;v_2(s,t,x):s)) + \int_0^t (t-\rho)F(\rho;v_2(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho\right| \le$$

$$\le \left|\varphi(p(0,t,x;v_1(s,t,x):s))-\varphi(p(0,t,x;v_2(s,t,x):s))\right|+$$

$$+\left|\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v_1(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho-\right.$$

$$\left.-\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v_2(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho\right|\le$$

$$\le\|\varphi'\|\left|p(0,t,x;v_1(s,t,x):s))-p(0,t,x;v_2(s,t,x):s))\right|+$$

$$+\int_0^t(t-\rho)\left|F(\rho;v_1(\rho,\rho,\xi):\xi)-F(\rho;v_2(\rho,\rho,\xi):\xi)\right|d\rho\le$$

$$\le\|\phi'\|\int_0^t|v_1(s,t,x)-v_2(s,t,x)|\,ds+$$

$$\int_0^t(t-\rho)L\,\|v_1(w,s,x)-v_2(w,s,x)\|_{G_2(t)}\,d\rho\le$$

$$\le(\|\phi'\|t+t\frac{t}{2}L\,\|v_1(w,s,x)-v_2(w,s,x)\|_{G_2(t)}\le$$

$$t(\|\phi'\|+\frac{T}{2}L)\,\|v_1(w,s,x)-v_2(w,s,x)\|_{G_2(t)}\le$$

$$\le T^*\Omega_1\,\|v_1(w,s,x)-v_2(w,s,x)\|_{G_2(T^*)},$$

где

$$\Omega_1=\|\phi'\|+\frac{T}{2}L.$$

Если выбрать $T^*=1/2\Omega_1$, то из следствия принципа сжимающих отображений Банаха получаем, что уравнение (9) имеет решение в пространстве функций с нормой не более $2\Omega_0(T^*)$.

Лемма1 доказана.

Лемма 2. Если имеют место равенства (6), (7), (8),то функция $u(t,x)$ является решением задачи (1), (2), (3), и наоборот.

Доказательство. Введя обозначение

$$z(t,x;u)=D[-u(t,x)]u(t,x),$$

запишем уравнение (1) в виде

$$D[u(t,x)]z(t,x;u)=F(t;u(t,\xi):\xi)). \tag{10}$$

Уравнение (10) с начальными условиями (2), (3) и условием $\psi(x)-\phi(x)\phi'(x)=0$ с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$z(t,x;u)=\int_0^t F(s;u(s,\xi:\xi)ds\,. \tag{11}$$

В самом деле, дифференцируя (11), получаем (10).

Полагая $t=0$ в (11), получаем $z(0,x;u)=0$.

Задача (11), (2), (3) с помощью метода дополнительного аргумента сводится к решению интегрального уравнения

$$u(t,x)=A(t,x;v(s,w,x):s,w)=\phi(p(0,t,x;v(s,t,x):s))$$

$$+\int_0^t(t-\rho)F(\rho;v(\rho,\rho,\xi):\xi)d\rho. \tag{12}$$

В самом деле, дифференцируя (12), получаем:

$$D[-u(t,x)]u(t,x)=$$

$$=\varphi'(p(0,t,x;v:s))D[-u(t,x)]p(0,t,x;v:s)+$$

$$+\int_0^t F(\rho;u(\rho,\xi):\xi)d\rho.$$

В силу (8) доказано выполнение (11). Полагая $t=0$ в (12), получаем (2).

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Функция $v(\tau,t,x)\in\bar{!}^{(2)}(Q_2(T))$, являющаяся при $0\le t\le T^*\le T$ решением интегрального уравнения (9), будет удовлетворять (7), а функция $u(t,x)$, определенная согласно (6), удовлетворяет (12).

Доказательство. Пусть $v(\tau,t,x)\in\bar{C}^{(2)}(Q_2(T^*))$ обращает интегральное уравнение (9) в тождество. Непосредственным дифференцированием из (9) выводится тождество

$$\omega(\tau,t,x)\equiv\varphi'(p(0,t,x;v))\int_0^t\omega(s,t,x)ds,$$

где $\omega(\tau,t,x)=D[-v(t,t,x)]v(\tau,t,x)$.

Из тождества следует равенство $\omega(\tau,t,x)=0$. Отсюда следует (7). Полагая $\tau=t$ в (9), из Леммы 2 получаем (12).

Лемма доказана.

Лемма 4. Решение уравнения (9) при достаточно малых t имеет непрерывные производные по всем переменным.

Доказательство. Формально дифференцируя (9) по x и обозначая $V_3(\tau,t,x)=v_x(\tau,t,x)$, получаем:

$$V_3(\tau,t,x)=\varphi'(p(0,t,x;v(s,t,x):$$

$$:s)\left(1+\int_0^t V_3(\rho,\tau,x)d\rho\right). \tag{13}$$

Как и в доказательстве Леммы 3, доказываем, что это уравнение имеет непрерывное решение при достаточно малых t. Тогда интегрированием получаем, что функция

$$V_3(\tau,t,x)=v(\tau,t,0)+\int_0^x V_3(\tau,t,\xi)d\xi\,, \tag{14}$$

где $v(\tau,t,x)$ – решение уравнения (9), также удовлетворяет (13), и, следовательно, совпадает с $v(\tau,t,x)$. Из (14) следует дифференцируемость $v(\tau,t,x)$ по x.

Формально дифференцируя (9) по t и обозначая $V_2(\tau,t,x)=v_t(\tau,t,x)$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\tau,t,x;v(\rho,t,x):\rho)=v(t,t,x)+\int_\tau^t V_2(\rho,t,x)d\rho,$$

$$V_2(\tau,t,x) = J_2(\tau,t,x;V_2(\tau,t,x):\tau,t) \equiv \varphi'(p(0,t,x;v(s,t,x):s)\times$$

$$\times(v(t,t,x)+\int_0^t V_2(\rho,t,x)d\rho).$$

Как и в доказательстве Леммы 3, доказываем, что это уравнение имеет непрерывное решение при достаточно малых *t*. Тогда интегрированием получаем, что функция

$$V_2(\tau,t,x) = x + \int_\tau^t V_3(\tau,s,x)dx \qquad (15)$$

удовлетворяет (9), и, следовательно, совпадает с $v(\tau,t,x)$. Из (15) следует дифференцируемость $v(\tau,t,x)$ по t.

Правая часть (9) при заданной непрерывной функции $v(\tau,t,x)$ дифференцируема по τ. Отсюда следует дифференцируемость $v(\tau,t,x)$поτ.

Лемма доказана.

Продолжая этот процесс, получаем справедливость соотношений:

$$v(\tau,t,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_2(T^*)), \quad u(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(G_2(T^*)).$$

Таким образом, по индукции из Леммы 4 следует

Лемма 5. При наличии производных соответствующего порядка у всех функций $\varphi(x)$ функция $v(\tau,t,x)$ имеет производные такого же порядка. Теорема доказана.

Литература

1. *Иманалиев М.И.* Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными / М.И. Иманалиев. Бишкек: Илим, 1992. 12 с.
2. *Иманалиев М.И.* К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Докл. Российской АН. 1993. Т. 329. № 5. С. 543–546.
3. *Иманалиев М.И.* К теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа Кортевега-де Фриза / М.И. Иманалиев, П.С. Панков, Т.М. Иманалиев // Докл. Российской АН. 1995. Т. 342. № 1. С.17–19.
4. *Панков П.С.* Приближенное решение начальной задачи для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента / П.С. Панков, Т.М. Иманалиев, Г.М. Кененбаева // Юбилейная науч. конф., посв. 50-летию развития математики в АН Казахстана: тез. докл. Алматы, 1995. С. 16.
5. *Панков П.С.* Численное решение задачи о движении волн Римана на основе метода дополнительного аргумента / П.С. Панков, О.Д. Будникова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Бишкек: Илим, 2003. Вып. 32. С.35–38.
6. *Аширбаева А.Ж.* Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева. Бишкек: Илим, 2013. 134 с.