УДК 517.97

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СЛУЧАЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

С.Б. Доулбекова

Исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации упругих колебаний в случае, когда функция внешнего воздействия является многозначной относительно функции управления. Установлена неоднозначность соответствия между элементами пространств состояний и управлений. Построены классы смежности функций управления.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; нелинейное интегральное уравнение; особые управления.

INVESTIGATION OF ONE CASE IN SOLVING THE PROBLEM OF NONLINEAR OPTIMIZATION OF ELASTIC VIBRATIONS

S.B. Doulbekova

It was investigated issues of solvability of nonlinear optimization problem of elastic vibrations in the case when the function of external influence is multiple valued function relative to the control function. It was ascertained the correspondence ambiguity between the elements of the state spaces and control functions. Classes of control functions were constructed.

Key words: Boundary problem; functional; nonlinear integral equation; special controls.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I\left[u(t)\right]=\int_Q\left\{\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+$$

$$+\beta\int_0^T P\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=g(x)f\left[t,u(t)\right],$$

$$x\in Q\subset R^n,\quad 0<t\leq T, \qquad (2)$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q, \qquad (3)$$

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_i}(t,x)\cos(\xi,x_i)+a(x)V(t,x)=0,$$

$$x\in\gamma, 0<t\leq'', \qquad (4)$$

с условиями, где функция $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$; $g(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $\xi_1(x)\in H(Q), \xi_2(x)\in H(Q)$, $P\left[t,u(t)\right]$ – заданные функции; оператор *A*, действующий по формуле

$$\mathrm{A}V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),$$

является эллиптическим в замкнутой области $\overline{Q}=Q\cup\gamma$ с кусочно-гладкой границей γ, т.е. условия

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in H(Q),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\geq C_0\sum_{i=1}^n\alpha_i^2,\quad C_0>0,$$

выполняются для любых вещественных чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$; $0(E), A(E)$ – ограниченные неотрицательные измеримые функции; ξ – внешняя нормаль к γ в точке $x\in\gamma$; H – Гильбертово пространство; H_1 – Соболево пространство первого порядка; Т – фиксировано.

Краевая задача (2)–(4) при каждом управлении $u(t)\in H(0,T)$ имеет обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^\infty\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x), \qquad (5)$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n} g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $g(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $z_n(x)$ – система ортонормированных собственных функций краевой задачи; λ_n – соответствующие им собственные значения.

Отметим, что данная задача обладает специфической особенностью, в частности, одно и тоже решение $V(t,x)$ краевой задачи (2)–(4) может быть определено несколькими управлениями $u_k(t) \in H(0,T)$.

Далее методом вычисления приращения функционала устанавливаем следующее соотношение [1]

$$\Delta I[u] = I[u+\Delta u] - I[u] =$$
$$= -\int_0^T \Delta\Pi\left[t, V(t,x), \omega(t,x), u(t)\right]dt +$$
$$+\int_Q \left\{\Delta V^2(T,x) + \Delta V_t^2(T,x)\right\}dx$$

где

$$\Delta\Pi[u(t)] = \Pi[u(t)+\Delta u(t)] - \Pi[\cdot, u(t)],$$

$$\Pi\left[t, V(t,x), \omega(t,x), u(t)\right] =$$
$$= \int_Q g(x)\omega(t,x)dx\, f\left[t,u(t)\right] - \beta P\left[t,u(t)\right]; \qquad (6)$$

Функция $\omega(t,x)$ как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = 0, \quad x \in Q, \quad 0 \le t < T,$$
$$\omega(T,x) + 2\left[V_t(T,x) - \xi_2(x)\right] = 0,$$
$$\omega_t(T,x) - 2\left[V(T,x) - \xi_1(x)\right] = 0, x \in Q,$$
$$\Gamma\omega(t,x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 \le t < T$$

определяется по формуле

$$\omega(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau, u(\tau)\right]d\tau\right]\frac{z_n(x)}{g_n}, \quad (7)$$

где

$$G_n(t) = \left\{G_{1n}(t), G_{2n}(t)\right\},\ h_n = (h_{1n}, h_{2n}),$$

$$G_{1n}(t) = g_n \cos\lambda_n(T-t), \quad G_{2n}(t) = \frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t),$$

$$h_{1n} = \xi_{2n} - \lambda_n\psi_{1n}\sin\lambda_n T - \psi_{2n}\cos\lambda_n T,$$
$$h_{2n} = \xi_{1n} - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n T,$$

ξ_{1n}, ξ_{2n} – коэффициенты Фурье функций $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$.

Согласно (6) принцип максимума [1] позволяет определить подозрительные на “оптимальность” управления $\{\tilde{u}(t)\}$ из условий оптимальности

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx \cdot f_u\left[t,u(t)\right] - \beta P_u\left[t,u(t)\right] = 0, \quad (8)$$

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx \cdot f_{uu}\left[t,u(t)\right] - \beta P_{uu}\left[t,u(t)\right] < 0. \quad (9)$$

Заметим, что в силу произвольности элемента $u(t) \in U(t)$, условия оптимальности (8)–(9) выполняются для каждого элемента обобщенного управления $U(t)$.

Рассмотрим случай $P_u[t,u(t)] = 0$, т.е. рассмотрим подмножество $N = \left\{(u_1(t),...,u_k(t),...)\,\middle|\, P_u[t,u(t)] = 0\right\}$ пространства $H(0,T)$, и предположим, что на множестве N имеет место соотношение

$$f_u\left[t,u(t)\right] \ne 0, \quad \forall t \in [0,T]. \qquad (10)$$

В этом случае каждый элемент множества N единственным образом определяет решение краевой задачи, и первое условие оптимальности имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau, u(\tau)\right]d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n, \quad (11)$$

а второе условие оптимальности не даёт никакой информации. Тем не менее, оптимальное управление, которое доставляет минимальное значение функционалу, может оказаться среди управлений, удовлетворяющих соотношению (11). В этой связи исследуем вопросы однозначной разрешимости интегрального уравнения (11). Нелинейное интегральное уравнение (11) относится к типу интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для построения решения уравнения (11) сначала преобразуем его. Положим [2]

$$f\left[t,u(t)\right] = y(t). \qquad (12)$$

В силу условия (10) управление $u(t)$ определяется однозначно, т. е. существует функция φ такая, что

$$u(t) = \varphi\left[t, y(t)\right]. \qquad (13)$$

С учетом (12) уравнение (11) перепишем в следующем виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\int_0^T G_n(\tau) y(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t) h_n. \qquad (14)$$

Отсюда в силу линейной независимости элементов вектора

$$G_n(t) = \left\{G_{1n}(t), G_{2n}(t)\right\},\ h_n = (h_{1n}, h_{2n}),$$
$$G_{1n}(t) = g_n\cos\lambda_n(T-t),$$
$$G_{2n}(t) = \frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t), \quad n = 1,2,3,...$$

имеем систему интегральных уравнений

$$\int_0^T G_n(\tau) y(\tau)d\tau = h_n, \quad n = 1,2,3,..., \qquad (15)$$

или в векторной форме

$$\int_0^T G(\tau) y(\tau)d\tau = h,$$

где $G(t) = \{G_1(t),...,G_n(t),...\}$, $h = \{h_1,...,h_n,...\}$.

Решение этой системы ищем в виде [3]

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k^*(t)\alpha_k \tag{16}$$

или в векторной форме

$$y(t) = G^*(t)\alpha, \quad \alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_n,...\}. \tag{17}$$

Подставив(17) в (15) имеем соотношения

$$\int_0^T G(\tau)G^*(\tau)\alpha d\tau = h,$$

где матрица

$$B = \int_0^T G(\tau)G^*(\tau)d\tau$$

является бесконечномерной симметричной квадратной матрицей, обладающей свойством $\alpha^* B\alpha \geq 0$, где равенство нулю, и в силу линейной независимости элементов вектора $G(t)$, имеет место лишь при нулевом векторе $\alpha = \theta$, т.е. матрица B является положительно-определенной. Как известно, в этом случае существует обратная матрица B^{-1}, и алгебраическое уравнение $B\alpha = h$ имеет единственное решение $\alpha = B^{-1}h$. Это решение подставляем в (17) и находим функцию $y(t)$, т. е.

$$y(t) = G^*(t)B^{-1}h. \tag{18}$$

Далее (18) подставляем в (13) и находим искомое управление $u(t)$. Отметим, что таким образом найденное управление относится к классу особых управлений.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т матем. НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
3. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.