УДК 517.97

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.К. Кадиримбетова

Исследованы вопросы сходимости приближений решения задачи оптимизации при минимизации кусочно-линейного функционала.

Ключевые слова: оптимальный процесс; приближенное решение; кусочно-линейный функционал; сходимость.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE CONTROL PROBLEM OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.K. Kadirimbetova

It is investigated the problems of convergence of the solution of the optimization problem at minimizing the piecewise-linear functional.

Key words: The optimal process; an approximate solution; piecewise linear functional; the convergence.

В работе [1] была рассмотрена задача оптимизации, где требуется минимизировать кусочно-линейный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T |u(t)|\,dt, \beta>0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau + g(t,x),$$

$$0<x<1,\ \ 0<t\le T, \quad (2)$$

$$v(0,x)=\psi(x),\ \ 0<x<1, \quad (3)$$

$$v_x(t,0)=0,\ \ v_x(t,1)+\alpha v(t,1) = f[t,u(t)],$$

$$0<t\le T, \quad (4)$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$ – заданная функция $v(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\quad 0<t\le T\}$ – описывает состояния управляемого процесса; ядро $K(t,\tau)$ – известная функция, определенная в квадрате $A=\{0<t<T,\quad 0<\tau<T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau\,d\tau = K_0 < \infty;$$

$g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$, $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция $f\left[t,u(t)\right]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$ и по функциональной переменной $u(t)$ монотонна, т.е.

$$\frac{\partial f\left[t,u(t)\right]}{\partial u} \ne 0, \forall t\in[0,T]; \quad (5)$$

λ – параметр, постоянная $\alpha>0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

При исследовании этой задачи легко установить, что решение задачи оптимизации определяется в виде тройки $\left(u^0(t),\ v^0(t,x),\ J\left[u^0(t)\right]\right)$, где

$$u^0(t) = \varphi\left[t,\tilde p(t),\beta\right] \quad (6)$$

– оптимальное управление,

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)\,ds + a_n^0(t)\right]z_n(x), \quad (7)$$

где

$$a_n^0(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right)d\tau$$

– оптимальный процесс,

$$J\left[u^0(t)\right] = \int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2 dx + 2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt \quad (8)$$

– минимальное значение функционала.

Приближения оптимального управления (6) находим по формуле

$$u_m(t)=\varphi\left[t,p_m(t),\beta\right],\quad m=1,2,3,..., \tag{9}$$

где $p_m(t)$ определяется из соотношений $p_m(t)=G\left[p_{m-1}(t)\right],\ m=1,2,3,...,\ G[\cdot]$ – известный оператор и удовлетворяет оценке

$$\left\|\tilde{p}(t)-p_m(t)\right\|_H\le\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H,$$

$$\tilde{p}(t)=\lim_{m\to\infty}p_m(t).$$

В формулах (6) и (9) функция $\varphi(\cdot)$ – известная функция и по функциональной переменной $p(t)$ удовлетворяет условию Липщица:

$$\left\|\varphi\left[t,p(t),\beta\right]-\varphi\left[t,\overline{p}(t),\beta\right]\right\|_H\le$$
$$\le\varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\overline{p}(t)\right\|_H,\quad \varphi_0(\beta)>0. \tag{10}$$

Далее, сходимость приближений оптимального управления следует из неравенства

$$\left\|u^0(t)-u_m(t)\right\|_H=\left\|\varphi\left[t,\tilde{p}(t),\beta\right]-\right.$$
$$\left.-\varphi\left[t,p_m(t),\beta\right]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|\tilde{p}(t)-p_m(t)\right\|_H\le$$
$$\le\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\varphi_0(\beta)\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H,\quad \varphi_0(\beta)>0,$$

где $0<\gamma<1$, $p_0(t)$ – известная функция пространства $H(0,T)$.

Для оптимального процесса будем различать следующие приближения:

1) l – приближение оптимального процесса по резольвенте находим по формуле

$$v_l(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x), \tag{11}$$

где $R_n^l(t,s,\lambda)$ – l-е приближение резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2) $l,\ m$ – приближение оптимального процесса находим по формуле

$$v_l^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^m(s)ds+a_n^m(t)\right]z_n(x), \tag{12}$$

где

$$a_n^m(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n(1)f\left[\tau,u_m(\tau)\right]\right)d\tau;$$

3) $l,\ m,\ r$ – приближение оптимального процесса находим по формуле

$$v_l^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^m(s)ds+a_n^m(t)\right]z_n(x). \tag{13}$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)\right\|_H\le C(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0,$

так как $|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}<1,\ C(\lambda)>0$;

2. $\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H\le$

$$\le\sqrt{2T\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$f_0\left\|u^0(t)-u_m(t)\right\|_H\xrightarrow[m\to\infty]{}0,\ \forall\ l=1,2,3,...;$$

3. $\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le C_0\sum\limits_{n=r+1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2\pi^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$

$\forall\ l,\ m=1,2,3,...,\ C_0>0$,

как остаточный член сходящегося ряда.

Далее из соотношения

$$\left\|v^0(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)+v_l(t,x)-\right.$$
$$\left.-v_l^m(t,x)+v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)\right\|_H$$
$$+\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H+$$
$$+\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\xrightarrow[l,m,r\to 0]{}0$$

следует сходимость приближения $v_l^{m,r}(t,x)$, которое может быть использовано на практике к оптимальному процессу $v^0(t,x)$.

Относительно минимального значения функционала будем различать следующие приближения:

1) l – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l(t,x)$, находим по формуле

$$J_l\left[u^0(t)\right]=\int_0^1\left[v_l(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u^0(t)\right|dt; \tag{14}$$

2) $l,\ m$ – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l^m(t,x)$, находим по формуле

$$J_l\left[u_m(t)\right]=\int_0^1\left[v_l^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_m(t)\right|dt, \tag{15}$$

3) $l,\ m,\ r$ – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l^{m,r}(t,x)$, находим по формуле

$$J_l^r\left[u_m(t)\right]=\int_0^1\left[v_l^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+2\beta\int_0^T\left|u_m(t)\right|dt. \tag{16}$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u^0(t)\right]\right|\le$
$$\le C_1\left\|v^0(T,x)-v_l(T,x)\right\|_H \xrightarrow[l\to 0]{} 0,$$
2. $\left|J_l\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u_m(t)\right]\right|\le C_2\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H+$
$$+C_3\left\|u^0(t)-u_m(t)\right\|\xrightarrow[l,m\to 0]{} 0;$$
3. $\left|J_l\left[u_m(t)\right]-J_l^r\left[u_m(t)\right]\right|\le$
$$\le C_4\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H \xrightarrow[l,m,r\to 0]{} 0,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – некоторые постоянные.

Далее из соотношения

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l^r\left[u_m(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u^0(t)\right]+\right.$$
$$\left.+J_l\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u_m(t)\right]+J_l\left[u_m(t)\right]-J_l^r\left[u_m(t)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J_l\left[u^0(t)\right]-J_l\left[u_m(t)\right]\right|+$$
$$+\left|J_l\left[u_m(t)\right]-J_l^r\left[u_m(t)\right]\right|\xrightarrow[l,m,r\to 0]{} 0$$

следует сходимость приближения $J_l^r\left[u_m(t)\right]$, которое может быть использовано на практике к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t)\right]$.

Литература

1. *Керимбеков А.К., Кадиримбетова А.К.* Интегральное уравнение оптимального управления в задаче тепловым процессом, описываемым фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением / А.К. Керимбеков, А.К. Кадиримбетова // Матер. межд.научн.-практич.конф. “Информационные технологии: инновации в науке и образовании”. Бишкек, 2015. С. 178–182.