УДК 517.97

О СЛУЧАЯХ ПОЯВЛЕНИЯ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

А. Керимбеков, С.Б. Доулбекова

Исследованы случаи появления особых управлений при решении задачи нелинейной оптимизации упругих колебаний. При этом функция внешнего воздействия является многозначной относительно функции управления. Найдены достаточные условия существования особых управлений.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; нелинейное интегральное уравнение; особые управления.

ON CASES OF APPEARANCE OF SPECIAL CONTROLS IN SOLVING THE NONLINEAR OPTIMIZATION PROBLEM OF ELASTIC VIBRATIONS

A. Kerimbekov, S.B. Doulbekova

It was investigated the cases of the appearance of special controls in solving of nonlinear optimization problem of elastic vibrations. In this case, the function of external influence is multiple valued function relative to the control function. Sufficient existence conditions for special controls were found.

Key words: Boundary problem; functional; nonlinear integral equation; special controls.

В статье рассматриваются вопросы появления особых управлений при решении одной задачи, где требуется минимизировать функционал

$$I\left[u(t)\right]=\int_Q\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T P\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \quad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt}-AV=g(x)f\left[t,u(t)\right],\quad x\in Q\subset R^n,\quad 0<t\leq T, \quad (2)$$

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in Q, \quad (3)$$

$$\Gamma V(t,x)\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)V_{x_i}(t,x)\cos(\xi,x_i)+$$

$$+a(x)V(t,x)=0,x\in\gamma,0<t\leq'', \quad (4)$$

где функция $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$; $g(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $\xi_1(x)\in H(Q)$, $P\left[t,u(t)\right]$ – заданные функции; оператор A действующий по формуле

$$AV(t,x)\equiv\sum_{i,j=1}^n(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x)V(t,x),$$

и является эллиптическим в замкнутой области $\overline{Q}=Q\cup\gamma$ с кусочно-гладкой границей γ, т. е. условия

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in H(Q),$$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\geq C_0\sum_{i=1}^n\alpha_i^2,\quad C_0>0$$

выполняются для любых вещественных чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$; $0(E),A(E)$ – ограниченные неотрицательные измеримые функции; ξ – внешняя нормаль к γ в точке $x\in\gamma$; H – Гильбертово пространство; H_1 – Соболево пространство первого порядка; T – фиксировано.

Краевая задача (2)–(4) при каждом управлении H_1 имеет обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^\infty\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x), \quad (5)$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n} g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $g(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H(Q)$, $z_n(x)$ – система ортонормированных собственных функций краевой задачи; λ_n – соответствующие им собственные значения.

Применяя принцип максимума для систем с распределенными параметрами [1] вычислим приращение функционала:

$$\Delta I[u] = I[u+\Delta u] - I[u] =$$
$$= -\int_0^T \Delta\Pi\left[t, V(t,x), \omega(t,x), u(t)\right]dt +$$
$$+\int_Q \left\{\Delta V^2(T,x) + \Delta V_t^2(T,x)\right\}dx,$$

где

$$\Delta\Pi\left[u(t)\right] = \Pi\left[u(t)+\Delta u(t)\right] - \Pi\left[\cdot, u(t)\right],$$
$$\Pi\left[t, V(t,x), \omega(t,x), u(t)\right] =$$
$$= \int_Q g(x)\omega(t,x)dx\, f\left[t,u(t)\right] - \beta P\left[t,u(t)\right]; \qquad (6)$$

функция $\omega(t,x)$ как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = 0, \quad x\in Q, \quad 0\le t<T,$$
$$\omega(T,x) + 2\left[V_t(T,x) - \xi_2(x)\right] = 0,$$
$$\omega_t(T,x) - 2\left[V(T,x) - \xi_1(x)\right] = 0, x\in Q,$$
$$\Gamma\omega(t,x) = 0, \quad x\in\gamma, \quad 0\le t<T$$

определяется по формуле

$$\omega(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n - \int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]\frac{z_n(x)}{g_n}, \qquad (7)$$

где

$$G_n(t) = \left\{G_{1n}(t), G_{2n}(t)\right\},\ h_n = (h_{1n}, h_{2n})$$
$$G_{1n}(t) = g_n\cos\lambda_n(T-t), \qquad G_{2n}(t) = \frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t),$$
$$h_{1n} = \xi_{2n} - \lambda_n\psi_{1n}\sin\lambda_n T - \psi_{2n}\cos\lambda_n T,$$
$$h_{2n} = \xi_{1n} - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n T,$$

ξ_{1n}, ξ_{2n} – коэффициенты Фурье функций $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$.

Согласно (6) принцип максимума [1] позволяет определить подозрительные на “оптимальность” управления $\left\{\tilde{u}(t)\right\}$ из условий оптимальности:

$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx\cdot f_u\left[t,u(t)\right] - \beta P_u\left[t,u(t)\right] = 0, \quad (8)$$
$$\int_Q g(x)\omega(t,x)dx\cdot f_{uu}\left[t,u(t)\right] - \beta P_{uu}\left[t,u(t)\right] < 0. \quad (9)$$

Рассмотрим случай, когда $P_u\left[t,u(t)\right] = 0$, и $f_u\left[t,u(t)\right] = 0$. Рассмотрим следующие подмножества: $N = \left\{\left(u_1(t),...,u_k(t),...\right)\middle| P_u\left[t,u(t)\right]=0\right\}$ и $M = \left\{\left(\bar{u}_1(t),...,\bar{u}_k(t),...\right)\middle| P_{\bar{u}}\left[t,\bar{u}(t)\right]=0\right\}$ пространства $H(0,T)$.

Предположим, что множество $R = N\cap M$ не пусто. Тогда на множестве R первое условие оптимальности (8) “как бы” имеет место, а вопрос выполнения второго условия оптимальности (9) остается открытым. Поэтому в этой ситуации принцип максимума не дает никакой информации об оптимальности управления $u(t)$. Поскольку принцип максимума является лишь необходимым условием, то управление, на котором функционал достигает минимума, возможно и существует. Такие управления в теории оптимального управления называются *особыми* управлениями.

Предположим, что в рассматриваемой задаче особые управления существуют. Для их определения будем исходить из следующего соотношения:

$$V(T,x) = \xi(x), \qquad (10)$$

которое означает, что управляемый процесс $V(t,x)$ в момент времени $t=T$ занимает желаемое состояние $\xi(x)$. В силу (5) из этого равенства получим следующие соотношения:

$$\psi_{1n}\cos\lambda_n T + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n T +$$
$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T \sin\lambda_n(T-\tau)g_n f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau = \xi_n,$$
$$n = 1,2,3,... \qquad (11)$$

Введя обозначения

$$G_n(t) = \frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t),$$
$$h_n = \xi_n - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n T,$$

перепишем эти соотношения в виде следующих систем интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$\int_0^T G_n(\tau) f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau = h_n, \quad n=1,2,3,... \qquad (12)$$

Далее введем обозначение [2]

$$f\left[\tau,u(\tau)\right] = \vartheta(\tau) \qquad (13)$$

и рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$\int_0^T G_n(\tau)\vartheta(\tau)d\tau = h_n, \quad n=1,2,3,... \qquad (14)$$

Решение этой системы уравнений ищем в виде [3]

$$\vartheta(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\tau)\alpha_n, \qquad (15)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ – неизвестные числа. Их следует определить так, чтобы функция (15) была решением системы уравнений (14). Подставив (15) в (14) имеем следующую систему бесконечномерных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} A_{n,k}\alpha_k = h_n, \quad A_{n,k} = \int_0^T G_n(\tau)G_k(\tau)d\tau. \qquad (16)$$

При исследовании разрешимости бесконечномерной алгебраической системы (16) в случае, когда на отрезке $(0,T)$ система функций $\{G_n(\tau)\}$ является ортогональной (или ортонормированной), тогда система (16) расщепляется и решается очень просто. В этом случае функцию $\vartheta(\tau)$ удается найти в виде (15). Далее из соотношения (13), поскольку не выполняется условие

$$f[\tau, u(\tau)] \neq 0,$$

функция $u(\tau)$ может быть определена неоднозначно, т. е. существуют отображения φ_i такие, что $u_i(\tau) = \varphi_i(\tau, \vartheta(\tau)), \quad i = 1, 2, 3, ..., p.$

Исследование общего случая является довольно трудной задачей, и мы здесь не будем его рассматривать.

Таким образом, множество решений задачи оптимизации может содержать особые управления, среди которых могут быть и оптимальные.

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т матем. НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
3. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.