УДК 517.97

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Р.Ж. Наметкулова

Исследованы вопросы сходимости, приближений решения задачи оптимизации при минимизации квадратичного функционала.

Ключевые слова: оптимальный процесс; приближенное решение; квадратичный функционал; сходимость.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM OF CONTROL DISTRIBUTION OF THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

R.J. Nametkulova

It is investigated the problems of convergence of the solution of the optimization problem at minimizing the quadratic functional.

Key words: The optimal process; an approximate solution; quadratic functional; the convergence.

В работе [1] была рассмотрена задача оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J[u(t,x)] = \int_0^1 [v(T,x)-\xi(x)]^2\,dx + $$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1 u^2(t,x)\,dx\,dt,\ \ \beta>0 \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$v_t = v_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)\,d\tau + f[t,x,u(t,x)], \qquad (2)$$

$$v(0,x)=\psi(x), \qquad (3)$$

$$v_x(t,0)=0,\ v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=0, \qquad (4)$$

где функция $v(t,x)$ описывает состояние управляемого теплового процесса; функция внешнего источника $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ \ 0<t\le T\}$ нелинейно зависит от функции управления $u(t,x)\in H(Q)$ и по функциональной переменной $u(t,x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f[t,u(t,x)]}{\partial u}\ne 0,\quad \forall t\in[0,T]; \qquad (5)$$

$\psi(x)\in H(0,1)$ – функция начального состояния; $\xi(x)\in H(0,1)$ – функция конечного состояния; $\lambda-$ параметр; постоянная $\alpha>0$, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

При исследовании этой задачи легко установить, что решение задачи оптимизации определяется в виде тройки $\left(u^0(t,x),\ v^0(t,x),\ J\left[u^0(t,x)\right]\right)$, где

$$u^0(t,x)=\varphi\left[t,x,\tilde p(t,x),\beta\right] \qquad (6)$$

– оптимальное управление,

$$v^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)a_n^0(s)\,ds + a_n^0(t)\right]z_n(x), \qquad (7)$$

где

$$a_n^0(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\int_0^1 f\left[\tau,y,u^0(\tau,y)z_n(y)\right]dy\,d\tau,$$

– оптимальный процесс,

$$J\left[u^0(t,x)\right]=\int_0^1\left[v^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1\left(u^0\right)^2(t,x)\,dx\,dt \qquad (8)$$

– минимальное значение функционала.

Приближения оптимального управления (6) находим по формуле

$$u_m(t,x)=\varphi\left[t,x,p_m(t,x),\beta\right],\quad m=1,2,3,\dots,\quad (9)$$

где $p_m(t,x)$ определяется из соотношений $p_m(t,x)=G\left[p_{m-1}(t,x)\right]$, $m=1,2,3,\dots$, $G[\cdot]$ – известный оператор и удовлетворяет оценке

$$\left\|\tilde{p}(t,x)-p_m(t,x)\right\|_H\le\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t,x)\right]-p_0(t,x)\right\|_H,$$

$$\tilde{p}(t,x)=\lim_{m\to\infty}p_m(t,x).$$

В формулах (6) и (9) функция $\varphi(\cdot)$ – известная функция, и по функциональной переменной $p(t,x)$ удовлетворяет условию Липщица:

$$\left\|\varphi\left[t,x,p(t,x),\beta\right]-\varphi\left[t,x,\bar{p}(t,x),\beta\right]\right\|_H\le$$
$$\le\varphi_0(\beta)\left\|p(t,x)-\bar{p}(t,x)\right\|_H,\quad \varphi_0(\beta)>0.\quad (10)$$

Сходимость приближений оптимального управления следует из неравенства

$$\left\|u^0(t,x)-u_m(t,x)\right\|_H=\left\|\varphi\left[t,x,\tilde{p}(t,x),\beta\right]-\right.$$
$$\left.-\varphi\left[t,x,p_m(t,x),\beta\right]\right\|_H$$
$$\le\varphi_0(\beta)\left\|\tilde{p}(t,x)-p_m(t,x)\right\|_H\le$$
$$\le\frac{\gamma^m}{1-\gamma}\varphi_0(\beta)\left\|G\left[p_0(t,x)\right]-p_0(t,x)\right\|_H,\quad \varphi_0(\beta)>0,$$

где $0<\gamma<1$, $p_0(t,x)$ – известная функция пространства $H(Q)$.

Для приближения оптимального процесса будем различать следующие приближения:

1) l – приближение оптимального процесса по резольвенте находим по формуле

$$v_l(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds+a_n^0(t)\right]z_n(x),\quad (11)$$

где $R_n^l(t,s,\lambda)$ – l-е приближение резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$;

2) $l,\ m$ – приближение оптимального процесса находим по формуле

$$v_l^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^m(s)ds+a_n^m(t)\right]z_n(x),\quad (12)$$

где

$$a_n^m(t)=e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\int_0^1 f\left[\tau,y,u^0(\tau,y)z_m(y)\right]dyd\tau,$$

3) $l,\ m,\ r$ – приближение оптимального процесса находим по формуле

$$v_l^{m,r}(t,x)=\sum_{n=1}^{r}\left[\lambda\int_0^T R_n^l(t,s,\lambda)a_n^m(s)ds+a_n^m(t)\right]z_n(x).\quad (13)$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)\right\|_H\le C(\lambda)$ $\left(|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$, так как $|\lambda|\sqrt{\dfrac{K_0T}{2\lambda_1^2}}<1$, $C(\lambda)>0$;

2. $\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H\le$

$$\le\sqrt{\left(1+\frac{\lambda^2K_0T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2}-|\lambda|\sqrt{K_0T}\right)^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)}$$

$f_0\left\|u^0(t,x)-u_m(t,x)\right\|_H\xrightarrow[m\to\infty]{}0,\quad\forall\ l=1,2,3,\dots;$

3. $\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le C_0\sum\limits_{n=r+1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2\pi^2}\xrightarrow[r\to\infty]{}0,$ $\forall\ l,\ m=1,2,3,\dots,\ C_0>0$,

как остаточный член сходящегося ряда.

Далее из соотношения

$$\left\|v^0(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)+v_l(t,x)-\right.$$
$$\left.-v_l^m(t,x)+v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\le$$
$$\le\left\|v^0(t,x)-v_l(t,x)\right\|_H+\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H+$$
$$+\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\xrightarrow[l,m,r\to 0]{}0$$

следует сходимость приближения $v_l^{m,r}(t,x)$, которое может быть использовано на практике к оптимальному процессу $v^0(t,x)$.

Относительно минимального значения функционала будем различать следующие приближения:

1. l – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l(t,x)$, находим по формуле

$$J_l\left[u^0(t,x)\right]=\int_0^1\left[v_l(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$
$$+\beta\int_0^T\int_0^1\left(u^0\right)^2(t,x)dxdt;\quad (14)$$

2. $l,\ m$ – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l^m(t,x)$, находим по формуле

$$J_l\left[u_m(t,x)\right]=\int_0^1\left[v_l^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$
$$+\beta\int_0^T\int_0^1 u_m^2(t,x)dxdt,\quad (15)$$

3. l, m, r – приближение минимального значения функционала, соответствующее процессу $v_l^{m,r}(t,x)$, находим по формуле

$$J_l^r\left[u_m(t,x)\right]=\int_0^1\left[v_l^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T\int_0^1 u_m^2(t,x)\,dxdt. \tag{16}$$

Непосредственными вычислениями доказываются следующие соотношения:

1. $$\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_l\left[u^0(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le C_1\left\|v^0(T,x)-v_l(T,x)\right\|_H\xrightarrow[l\to 0]{}0;$$

2. $$\left|J_l\left[u^0(t,x)\right]-J_l\left[u_m(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le C_2\left\|v_l(t,x)-v_l^m(t,x)\right\|_H+$$
$$+C_3\left\|u^0(t,x)-u_m(t,x)\right\|\xrightarrow[l,m\to 0]{}0;$$

3. $$\left|J_l\left[u_m(t,x)\right]-J_l^r\left[u_m(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le C_4\left\|v_l^m(t,x)-v_l^{m,r}(t,x)\right\|_H\xrightarrow[l,m,r\to 0]{}0,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – некоторые постоянные.

Далее из соотношения

$$\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_l^r\left[u_m(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_l\left[u^0(t,x)\right]+J_l\left[u^0(t,x)\right]-\right.$$
$$\left.-J_l\left[u_m(t,x)\right]+J_l\left[u_m(t,x)\right]-J_l^r\left[u_m(t,x)\right]\right|\le$$
$$\le\left|J\left[u^0(t,x)\right]-J_l\left[u^0(t,x)\right]\right|+$$
$$+\left|J_l\left[u^0(t,x)\right]-J_l\left[u_m(t,x)\right]\right|+$$
$$+\left|J_l\left[u_m(t,x)\right]-J_l^r\left[u_m(t,x)\right]\right|\xrightarrow[l,m,r\to 0]{}0$$

следует сходимость приближения $J_l^r\left[u_m(t,x)\right]$, которое может быть использовано на практике, к минимальному значению функционала $J\left[u^0(t,x)\right]$.

Литература

1. *Керимбеков А.* Оптимальное распределенное управление тепловыми процессами, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями и приближенные решения краевых задач / А. Керимбеков, Р. Наметкулова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 2014. Вып. 46. С. 14–20.