УДК 539.374:517.956

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И СОВМЕСТНОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С N-ОБРАЗНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

И.Э. Келлер

Рассматриваются уравнения двумерного квазистатического течения вязкопластической несжимаемой среды с произвольной материальной функцией. Найден вид этой функции, необходимый и достаточный для полной интегрируемости и расщепляемости рассматриваемой системы. Данная функция имеет немонотонный характер и соответствует активной вязкопластической среде, в действительности наблюдаемой в экспериментах.

Ключевые слова: вязкопластичность; полная интегрируемость; активные материалы.

INTEGRABILITY OF EQUATIONS OF EQUILIBRIUM AND COMPATIBILITY OF VISCOPLASTIC MEDIUM WITH N-FORM DEPENDENCE ON STRAIN RATE

I.E. Keller

The article reviews equations for two-dimensional quasistatic flow of viscoplastic incompressible medium with an arbitrary material function. A form of the function ensuring complete integrability and decoupling of the equations has been found. The function has nonmonotone graph and corresponds to an active viscoplastic medium observed experimentally.

Key words: viscoplasticity; complete integrability; active materials.

Рассматриваются уравнения квазистатического движения несжимаемой вязкопластической среды в двумерном случае

$$\nabla\cdot\sigma = 0,\quad \sigma = -\mathrm{p}\mathrm{I} + \frac{\tau(\xi)}{2\xi}\mathrm{D},\quad \mathrm{D} = \tfrac{1}{2}(\nabla\mathrm{v} + \mathrm{v}\nabla),\quad \nabla\cdot\mathrm{v} = 0\ , \tag{1}$$

где ∇ – оператор Гамильтона в текущей конфигурации, σ и D – тензоры напряжений и деформаций скорости, p – гидростатическое давление, I – единичный тензор второго ранга, v – скорость перемещений, $\xi = \sqrt{\tfrac{1}{2}\mathrm{D}:\mathrm{D}}$ – интенсивность скорости деформаций.

Ставится задача поиска общего вида материальной функции $\tau(\xi)$, обеспечивающей полную интегрируемость системы (1).

В декартовых ортогональных координатах система (1) принимает вид (запятая означает частную производную)

$$\sigma_{xx},_x + \sigma_{xy},_y = 0,\quad \sigma_{xy},_x + \sigma_{yy},_y = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_{xx} = -p + \tfrac{1}{2}\tau(\xi)\xi^{-1}v_x,_x\,,\ \sigma_{yy} = -p - \tfrac{1}{2}\tau(\xi)\xi^{-1}v_x,_x\,,\ \sigma_{xy} = \tfrac{1}{4}\tau(\xi)\xi^{-1}\left(v_x,_y + v_y,_x\right), \tag{3}$$
$$v_x,_x + v_y,_y = 0,\quad \xi = ((v_x,_x)^2 + \tfrac{1}{4}(v_x,_y + v_y,_x)^2)^{1/2}.$$

Для записи уравнений (2), (3) в виде квазилинейной системы компоненты тензоров напряжений и деформаций скорости представляются в виде [1]

$$\sigma_{xx} = -p - \tfrac{1}{2}\tau(\xi)\sin 2\phi, \quad \sigma_{yy} = -p + \tfrac{1}{2}\tau(\xi)\sin 2\phi, \quad \sigma_{xy} = \tfrac{1}{2}\tau(\xi)\cos 2\phi, \tag{4}$$

$$v_x,_x = -\xi\sin 2\phi, \quad v_y,_y = \xi\sin 2\phi, \quad v_x,_y + v_y,_x = 2\xi\cos 2\phi, \tag{5}$$

удовлетворяющем уравнениям (3), где φ – угол между одной из линий максимальных касательных напряжений и осью x. Выражения (4) подставляются в уравнения (2), а из (5) вместе с выражениями

$$v_y,_x = \xi\cos 2\phi + q, \quad v_x,_y = \xi\cos 2\phi - q,$$

где $q = \tfrac{1}{2}(v_y,_x - v_x,_y)$ – вихрь скорости, образуются уравнения совместности деформаций скорости, в результате чего получаем систему

$$\mathrm{u},_x + \mathrm{L}\,\mathrm{u},_y = 0, \quad \mathrm{L} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}, \tag{6}$$

$$\mathrm{u} = \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \\ p \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \tau'\sin 2\phi & 2\tau\cos 2\phi & 2 & 0 \\ -\tau'\cos 2\phi & 2\tau\sin 2\phi & 0 & 0 \\ -\cos 2\phi & 2\xi\sin 2\phi & 0 & 1 \\ -\sin 2\phi & -2\xi\cos 2\phi & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -\tau'\cos 2\phi & 2\tau\sin 2\phi & 0 & 0 \\ -\tau'\sin 2\phi & -2\tau\cos 2\phi & 2 & 0 \\ -\sin 2\phi & -2\xi\cos 2\phi & 0 & 0 \\ \cos 2\phi & -2\xi\sin 2\phi & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где $\tau' = d\tau / d\xi$, для исследования которой разработаны методы [2].

Собственные числа в общем случае несимметричной матрицы суть

$$\lambda_{1\pm} = \mathrm{tg}(\phi \pm \beta), \qquad \lambda_{2\pm} = -\mathrm{ctg}(\phi \pm \beta), \qquad \mathrm{tg}\,2\beta = \sqrt{-m}, \tag{7}$$

$$m = d\ln\tau / d\ln\xi = \tau'\xi / \tau \tag{8}$$

– функция чувствительности к скорости деформации. Линии в плоскости (x, y), удовлетворяющие уравнениям $dy/dx = -\lambda(x, y)$, где $\lambda = \{\lambda_{1\pm}, \lambda_{2\pm}\}$, являются характеристиками системы (6). Выражения (7) позволяют увидеть, что система (6) в каждой точке имеет две пары ортогональных действительных характеристик при m < 0, сливающихся в одну такую пару при, и две пары ортогональных комплексных характеристик при m > 0, сливающихся в одну такую пару при m = 1. Оба вырожденных случая соответствуют двумерным характеристическим пространствам; при тип уравнений гиперболический, а при m = 1 – эллиптический.

Дифференциальные соотношения на характеристиках находятся умножением (6) на левые собственные векторы матрицы L и имеют вид

$$\begin{aligned} &\tau\xi^{-1}\sqrt{m(m-1)}\,d\xi \pm 2\tau\sqrt{1-m}\,d\phi \pm 2dp - \tau\xi^{-1}\sqrt{-m}\,dq = 0, \\ &\tau\xi^{-1}\sqrt{m(m-1)}\,d\xi \pm 2\tau\sqrt{1-m}\,d\phi \mp 2dp + \tau\xi^{-1}\sqrt{-m}\,dq = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

для $\lambda_{1\pm}$ и $\lambda_{2\pm}$ соответственно.

Каждое из пфаффовых уравнений (9) вида $P(\xi)d\xi + Q(\xi)d\phi + Rdp + S(\xi)dq = 0$ вполне интегрируемо при выполнении теоремы Фробениуса [3], вследствие которой должны выполняться условия $Q \equiv \alpha,\ S \equiv \gamma$, где α, γ – произвольные константы. Эти условия с учетом обозначения (8) принимают вид двух дифференциальных уравнений $\tau' - \xi^{-1}\tau + \alpha^2\xi^{-1}\tau^{-1} = 0, \quad \tau' + \gamma^2\xi\tau^{-1} = 0$, которым удовлетворяет функция

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{\tau_*^2 - 4\mu^2\xi^2}, & 0 \le \xi \le \xi_*, \\ \sqrt{4\mu^2\xi^2 - \tau_*^2}, & \xi > \xi_*, \end{cases} \tag{10}$$

где $\xi_* = \tau_* / (2\mu)$, причем первый случай соответствует $\alpha = \tau_*,\ \gamma = 2\mu$, а второй – $\alpha = i\tau_*,\ \gamma = i2\mu$. Данные условия обеспечивают существование для каждой пфаффовой формы функции $z(\mathbf{u})$, сохраняющей постоянное значение вдоль соответствующей характеристики $P(\xi)d\xi + Q(\xi)d\phi + Rdp + S(\xi)dq = dz = 0$

и задающей интегральную поверхность в пространстве зависимых переменных. В невырожденном случае $m \neq 0, m \neq 1$ решение системы (6) в точке формируется в результате пересечения четырех трехмерных интегральных поверхностей.

Существенно нелинейная материальная функция (10), гарантирующая полную интегрируемость уравнений (1), имеет N-образный вид и допускает образование линий разрыва в сплошной среде, разделяющих области с гиперболическим и эллиптическим типами оператора. Подобно уравнениям газовой динамики [4], где переход от гиперболического к эллиптическому типу происходит при достаточно большой величине модуля скорости перемещений |v| = c, в данной модели такой переход имеет место при достаточно большой величине интенсивности скорости деформации $\xi = \xi_*$. Функция (11) симметризует дифференциальный оператор L. Вследствие характера этой функции текучесть среды автоматически гарантируется при произвольной интенсивности напряжений в любой точке области с гиперболическим или эллиптическим типом уравнений.

Кроме того, эта функция обеспечивает выполнение необходимого и достаточного условия [5] расщепления квазилинейной системы (7) на две невзаимодействующие подсистемы, определенные в касательных подпространствах $X_1, X_2, X_1 \oplus X_2 = X$, натянутых на пары ортогональных собственных векторов оператора L и образованных всевозможными линейными комбинациями инвариантов Римана и χ, ω *и* η, ζ:

$$2\chi = \beta + \phi + \overline{p} - \overline{\mu}q, \qquad 2\omega = -\beta - \phi + \overline{p} - \overline{\mu}q,$$
$$2\eta = -\beta + \phi + \overline{p} + \overline{\mu}q, \qquad 2\zeta = \beta - \phi + \overline{p} + \overline{\mu}q. \tag{11}$$

Инварианты Римана (интегралы уравнений (9)) приведены здесь для области гиперболичности в соответствии с последовательностью собственных значений $\lambda_{1+}, \lambda_{1-}$ (первая строка) и $\lambda_{2+}, \lambda_{2-}$ (вторая строка), Условие расщепляемости требует $\overline{\mu} = \mu / \tau_*, \overline{p} = p / \tau_*$. простоты спектра линейного оператора L (что в общем случае имеет место – см. (7)), а также инволютивности данного оператора и его тензора Ниенхейса с компонентами

$$N^j_{ik} = L^1_i L^j_{k,1} + L^2_i L^j_{k,2} - L^1_k L^j_{i,1} - L^2_k L^j_{i,2}$$

относительно элементов данных подпространств. Тензор Ниенхейса здесь выступает как билинейный оператор, его свертка с векторами-аргументами осуществляется по нижним индексам.

Система (6) в терминах интегралов (11) сводится к двум парам параметрически связанных квазилинейных уравнений

$$\chi_{,x} - \mathrm{ctg}(\chi - \omega)\chi_{,y} = 0, \quad \omega_{,x} + \mathrm{tg}(\chi - \omega)\omega_{,y} = 0,$$
$$\eta_{,x} - \mathrm{ctg}(\eta - \zeta)\eta_{,y} = 0, \quad \zeta_{,x} + \mathrm{tg}(\eta - \zeta)\zeta_{,y} = 0,$$

которые точно линеаризуются преобразованиями годографа и сводятся к телеграфным уравнениям [6].

Переопределенные уравнения для компонент скорости в координатах характеристического подпространства $X_1 = (\chi, \omega)$ или $X_2 = (\eta, \zeta)$ имеют вид

$$\frac{dv_1}{ds_1} - \frac{v_2}{\rho_1} = -\xi \sin 2\phi, \quad \frac{dv_1}{ds_2} - \frac{v_2}{\rho_2} = \xi \cos 2\phi - q,$$
$$\frac{dv_2}{ds_1} + \frac{v_1}{\rho_1} = \xi \cos 2\phi + q, \quad \frac{dv_2}{ds_2} + \frac{v_1}{\rho_2} = \xi \sin 2\phi,$$

где s_1, s_2 – длины дуг характеристических кривых в плоскости (x, y), $\rho_1^{-1} = d\varphi_1 / ds_1$, $\rho_2^{-1} = d\varphi_2 / ds_2$ – их локальные кривизны, а φ_1, φ_2 – локальные углы наклона касательных к этим кривым относительно оси.

Для гиперболического типа уравнений получены центрированные автомодельные решения [7] и разработаны эффективные методы численного интегрирования краевых задач [8].

Подобные N-образные виды функции $\tau(\xi)$ наблюдаются экспериментально при деформировании металлических сплавов в режиме динамической сверхпластичности и позволяют дать правильное теоретическое объяснение явлению “бегающей шейки” [9].

Литература

1. *Фрейденталь А.* Математические теории неупругой сплошной среды / А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.

2. *Рождественский Б.Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. М.: Наука, 1988. 686 с.
3. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными / П.К. Рашевский. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
4. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников. М.; Ижевск: ИКИ, 2003. 336 с.
5. *Bogoyavlenskij O.I.* Decoupling problem for systems of quasi-linear pde's // Commun. Math. Phys. 2007. No. 269. P. 545–556.
6. *Келлер И.Э.* Интегрируемость уравнений равновесия и совместности вязкопластической среды с отрицательной чувствительностью к скорости деформации / И.Э. Келлер // ДАН. 2013. Т. 451. № 6. С. 643–646.
7. *Келлер И.Э.* Решения типа Прандтля – Майера уравнений вязкопластичности с отрицательной чувствительностью к скорости деформации / И.Э. Келлер // Известия РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 54–64.
8. *Келлер И.Э.* Интегрирование краевых задач для уравнений вязкопластичности с отрицательной чувствительностью к скорости деформации / И.Э. Келлер // Вычисл. механика сплошных сред. 2013. № 4. С. 438–450
9. *Рудской А.И.* Механика динамической сверхпластичности алюминиевых сплавов / А.И. Рудской, Я.И. Рудаев. СПб.: Наука, 2009. 218 с.