УДК 517.968.2

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

А. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева

Рассмотрено интегральное уравнение первого рода в пространстве непрерывных функций. Предполагая, что вместо ядра задано конечное число слагаемых функций, которое при $n \to \infty$ сходится к заданному ядру, построен конечномерный регуляризующий оператор для решения интегрального уравнения первого рода. Получена оценка между приближенным и точным решениями. Доказана сходимость приближенного решения к точному решению при $n \to \infty$. Осуществлен выбор параметра регуляризации от числа n.

Ключевые слова: интегральное уравнение первого рода; регуляризирующий оператор; конечномерная аппроксимация.

ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ ФУНКЦИЯЛАР МЕЙКИНДИГИНДЕ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЧЫГАРУУ ҮЧҮН АКЫРКЫ ЧЕНЕМДЕГИ ЖӨНГӨ САЛУУЧУ ОПЕРАТОРДУ ТУРГУЗУУ

Бул макалада үзгүлтүксүз функциялар мейкиндигинде биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме изилденди. Интегралдык теңдеменин берилген ядросунун ордуна кошулган функциялардын акыркы саны берилсе жана акыркы сумма $n \to \infty$ берилген ядрого окшош болгон учурда, биринчи түрдөгү интегралдык теңдемени чыгаруу үчүн акыркы ченемдеги жөнгө салуучу оператор тургузулду. $n \to \infty$ болгон учурда жакындаштырылган чыгарылыштын так чыгарылыш менен бирдейлиги далилденди. n санынан жөнгө салуучу параметрди тандап алуу ишке ашырылды.

Түйүндүү сөздөр: биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, жөнгө салуучу оператор, акыркы ченемдеги жакындаштыруу.

CONSTRUCTING FINITE-DIMENSIONAL REGULARIZING OPERATOR FOR SOLVING THE FIRST-ORDER INTEGRAL EQUATION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

A. Saadabaev, A.R. Abdyldaeva

In this paper we consider an integral equation of the first kind in the space of continuous functions. Assuming that instead of a kernel a finite number of summands of functions are given, which $n \to \infty$ converges to a given kernel, constructed a finite-dimensional regularizing operator for solving an integral equation of the first kind. An estimate is obtained between the approximate and exact solutions. The convergence of the approximate solution to the exact solution is proved $n \to \infty$. The regularization parameter is chosen from the number n.

Keywords: integral equation of the first kind; regularizing operator; finite-dimensional approximation.

В работах [1–4] исследовано операторное нелинейное уравнение первого рода в гильбертовом пространстве. В данной работе построена конечномерная аппроксимация решения интегрального уравнения первого рода в пространстве непрерывных функций.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение первого рода:

$$\int_0^1 K(t,s)\,z(s)\,ds = u(t), \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $K(\mathrm{t,s})$ – непрерывная функция в квадрате $0 \le t, s \le 1$, $u(\mathrm{t})$ – заданная непрерывная функция; $z(\mathrm{s})$ – искомая функция.

Левую часть уравнения (1) обозначим через $K(\mathrm{s})$, она является интегральным оператором. Решение уравнения (1) будем искать в пространстве непрерывных функций. Пусть ядро $K(\mathrm{t,s})$ является симметричным и положительным. Обозначим через $\{\varphi_k(\mathrm{t})\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированные собственные функции ядра, соответствующие характеристическим значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\lambda_k > 0$ и $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Известно [5], что решение уравнения (1) не является устойчивым от заданной функции $u(\mathrm{t})$, т. е. нахождение решения уравнения (1) является некорректной задачей. Для нахождения устойчивого решения наряду с уравнением (1) рассмотрим интегральное уравнение второго рода [6]:

$$\alpha z_\alpha + K(\mathrm{z}_\alpha) = \mathrm{u(t)}, \quad \mathrm{t} \in [0,1], \tag{2}$$

где α – положительный действительный параметр.

Ядро $K(\mathrm{t,s})$ интегрального уравнения представимо в следующем виде

$$K(\mathrm{t,s}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(\mathrm{t})\varphi_k(s)}{\lambda_k}.$$

Рассмотрим n первых сумм ядра $K_n z = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{\lambda_k}\varphi_k(\mathrm{t})$, где $z_k = \int_0^1 \varphi_k(\mathrm{t}) z(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}$ – коэффициенты Фурье.

Оценим разность, используя неравенство Коши–Буняковского:

$$\|Kz - K_n z\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \varphi_k(\mathrm{t}) \right\| \le \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{z_k^2}{\lambda_k} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(\mathrm{t})}{\lambda_k} \right)^{1/2} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|z\| \cdot M.$$

Здесь мы также использовали неравенства Бесселя, т.е. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} z_k^2 \right)^{1/2} \le \|z\|$. Ядро $K(\mathrm{t,t})$ ограничено числом M, т. е. $K(\mathrm{t,t}) \le M$.

Отсюда

$$\|Kz - K_n z\|_{C(0,1)} \le \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \|z\|_{C(0,1)}. \tag{3}$$

Таким образом, имеет место следующая оценка: $\|K - K_n\| \le \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}$.

Рассмотрим уравнение второго рода

$$\alpha z_\alpha^n + K_n z_\alpha^n = u, \tag{4}$$

где $K_n(\mathrm{z}) = \int_0^1 K_n(\mathrm{t,s})\,\mathrm{z(s)}\,ds$.

Уравнение (4) перепишем в виде

$$\alpha z_\alpha^n + K(\mathrm{z}_\alpha^n) = \mathrm{u(t)} - (K_n - K)(\mathrm{z}_\alpha^n). \tag{5}$$

Оператор $(\alpha E + K)^{-1}$ существует [6]. Тогда из (5) получим:

$$z_\alpha^n = (\alpha E + K)^{-1} u(\mathrm{t}) - (\alpha E + K)^{-1} (K_n - K) z_\alpha^n. \tag{6}$$

Используя оценку $\left\|(\alpha E + K)^{-1}\right\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2}$ и неравенство (3), получим неравенство:

$$\left\|(\alpha E + K)^{-1} (K_n - K) z_\alpha^n\right\|_{C(0,1)} \le \left\|(\alpha E + K)^{-1}\right\|_{C(0,1)\to C(0,1)} \|K_n - K\| \cdot \|z_\alpha^n\|_{C(0,1)} \le \frac{C_0^*}{\alpha^2} \|z_\alpha^n\|_{C(0,1)} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Это означает

$$\left\|(\alpha E + K)^{-1} (K_n - K)\right\| \le \frac{C_0^*}{\alpha^2} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Пусть параметр α удовлетворяет условию

$$\frac{C_0^*}{\alpha^2(n)} \cdot \frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} < 1.$$

Тогда в силу теоремы Банаха [7], обратный оператор $\left(E+\left(\alpha E+K\right)^{-1}\left(K_n-K\right)\right)^{-1}$ существует и решение интегрального уравнения (5) представимо в виде

$$z_\alpha^n=\left(E+\left(\alpha E+K\right)^{-1}\left(K_n-K\right)\right)^{-1}\left(\alpha E+K\right)^{-1}u(\mathrm{t}).$$

Пусть функция $z(\mathrm{t})\in \mathrm{C}\left(0,1\right)$ является решением уравнения(1), т. е. $u(\mathrm{t})=\mathrm{K(z)}$. Оценим разность $z_\alpha^n(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})$ по норме пространства $\mathrm{C}\left(0,1\right)$. Используя неравенство треугольника, получим:

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z_\alpha(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}+\left\|z_\alpha(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}, \tag{7}$$

где $z_\alpha(\mathrm{t})=\left(\alpha E+K\right)^{-1}u$.

Оценим первое слагаемое:

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z_\alpha(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}=\left\|\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}u(\mathrm{t})-\left(\alpha E+K\right)^{-1}u(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}=$$

$$=\left\|\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}\left(\alpha E+K-\alpha E-K_n\right)\left(\alpha E+K\right)^{-1}u(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}=\left\|\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}\left(K-K_n\right)\left(\alpha E+K\right)^{-1}u(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}. \tag{8}$$

Оператор $\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}$ существует для любого оператора K_n, удовлетворяющего неравенству (3), причем он представим в виде

$$\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}=\left(E+\left(\alpha E+K\right)^{-1}\left(K_n-K\right)\right)^{-1}\left(\alpha E+K\right)^{-1}.$$

Отсюда получим следующую оценку:

$$\left\|\left(\alpha E+K_n\right)^{-1}\right\|_{C(0,1)\to C(0,1)}\le\frac{C_0^*}{\alpha^2}\left(1-C_0\frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}\left(n\right)\right)^{-1}. \tag{9}$$

Оценим функцию $\left(\alpha E+K\right)^{-1}u(\mathrm{t})$ при условии, что $u(\mathrm{t})=\mathrm{Kz}$. Тогда, используя теорему Гильберта [7], получим:

$$\left(\alpha E+K\right)^{-1}Kz=K\left(\alpha E+K\right)^{-1}z.$$

Пусть точное решение уравнения (1) представимо в виде $z=K\vartheta,\quad \vartheta\in L_2\left(0,1\right)$.

Тогда $\left(\alpha E+K\right)^{-1}Kz=K\left(\left(\alpha E+K\right)^{-1}\vartheta\right)$.

Отсюда $\left\|\left(\alpha E+K\right)^{-1}Kz\right\|\le C_3\left\|\left(\alpha E+K\right)^{-1}K\vartheta\right\|_{L_2}\le C_3\left\|\vartheta\right\|_{L_2}$ для любого $t\in\left(0,1\right)$.

Используя это и неравенство (9), из (8) получим:

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z_\alpha(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\frac{C_0^*}{1-C_0^*\dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}}C_0^*\frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}C_3\left\|\vartheta\right\|_{L_2}. \tag{10}$$

Для разности $z_\alpha(\mathrm{t})-\mathrm{z(t)}$ справедлива оценка $\left\|z_\alpha(\mathrm{t})-\mathrm{z(t)}\right\|_{C(0,1)}\le\alpha^{1-\theta}C_1\left\|\vartheta\right\|_{L_2}$. [3]

Учитывая это и неравенство (10), из (7) получим:

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\frac{C_0^*}{1-C_0^*\dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}}C_0^*C_3\frac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2}\left\|\vartheta\right\|_{L_2}+\alpha^{1-\theta}C_1\left\|\vartheta\right\|_{L_2}.$$

Подставляя $\alpha=ph^j$, из этого неравенства получим:

$$1-2j=j(1-\theta),\quad \mathrm{j}=\frac{1}{3-\theta},\ \text{т. е.}$$

$$\left\|z_\alpha^n(\mathrm{t})-z(\mathrm{t})\right\|_{C(0,1)}\le\left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}}C_4\left(C_0^*,C_3,p,\left\|\vartheta\right\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия: 1) уравнение (1) имеет единственное решение; 2) ядро $K(\mathrm{t,s})$ непрерывно в квадрате $0 \le t, s \le 1$ и симметрично; 3) оператор K, $0<\theta<1$, действует из пространства $L_2(0,1)$ в $C(0,1)$; 4) ядро $K_n(\mathrm{t,s})$ удовлетворяет неравенству (3).

Тогда, при $C_0^* \dfrac{M}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\alpha^{-2} < 1$, т. е. при $\alpha = \dfrac{1}{\lambda_{n+1}^{1/6}}$ и при любом заданном $u(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}(0,1)$ решение уравнения (4) существует и для любого решения уравнения (1), представимого в виде $z = K\vartheta$, справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha(n)E + K_n\right)^{-1} Kz = z(\mathrm{t})$ равномерно по t, причем справедлива оценка:

$$\left\|\left(\alpha E + K_n\right)^{-1} K^2\vartheta - K\vartheta\right\|_{C(0,1)} \le \left(\frac{M}{\lambda_{n+1}}\right)^{\frac{1-\theta}{3-\theta}} C_4\left(C_0^*, C_3, p, \|\vartheta\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Литература

1. *Саадабаев А.* Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода / А. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // Проблемы современной науки и образования. М., 2016. № 14(56).
2. *Саадабаев А.* Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве / А. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2016. № 1 (37).
3. *Саадабаев А.* Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве / А. Саадабаев, А.Р. Абдылдаева // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. М., 2016. № 11. Часть 1.
4. *Абдылдаева А.Р.* Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью / А.Р. Абдылдаева // Известия КГТУ им. И. Раззакова. 2017. № 2 (42).
5. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.
6. *Лаврентьев М.М.* Об интегральных уравнениях первого рода / М.М. Лаврентьев // Докл. АН СССР. 1969. Т. 127. № 1. С. 31–33.
7. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин: учебник для мат. спец. ун-тов. 4-е изд., перераб. М.: Наука, 1976.