

УДК 550.837

## МОДЕЛЬ ОТРАЖЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВИДЕ ЛИНЕЙНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА

*В.Д. Брагин, И.А. Голяницкий*

Исследуется модель отражений в форме линейного четырехполюсника с подробным описанием измерения параметров четырехполюсника, его импульсной характеристики и передаточной функции путем введения более общего оператора анализа, позволившего формально легко получить все необходимые характеристики для любых аperiodических и резонансных цепей дифференцирующего и интегрирующего типа и их комбинаций.

*Ключевые слова:* фильтр; помеха; электромагнитные зондирования; коррелятор; АКФ.

---

## СЫЗЫКТУУ КӨПҮӨЛДҮК ТҮРҮНДӨГҮ ЭЛЕКТРОМАГНИТТИК ТОЛКУНДАРДЫН ЧАГЫЛУУ МОДЕЛИ

Бул макалада сызыктуу көпүөлдүк формасындагы чагылуунун модели изилдөөгө алынган, дифференциалдык жана интеграциялык типтеги аperiodикалык жана резонанстык чынжырлар жана алардын комбинациялары үчүн зарыл болгон мүнөздөмөлөрдү жеңил алууга мүмкүндүк берүүчү жалпы талдоо жүргүзүү аркылуу төртүөлдүктүн параметрлеринин өлчөнүшү кеңири сүрөттөлгөн.

*Түйүндүү сөздөр:* фильтр; тоскоолдуктар; электромагниттик байкоо жүргүзүү; коррелятор; АКФ.

---

## THE REFLECTION MODEL OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN THE FORM OF A LINEAR MULTIPOLE

*V.D. Bragin, I.A. Golyanitskiy*

The article regards the reflection model in the form of a linear four-terminal network with a detailed description of the measurement of the parameters of the four-terminal network, its impulse response and transfer function by introducing a more general analysis operator, which formally easily obtain all necessary characteristics for any aperiodic and resonant circuits of the differentiating and integrating type and their combinations .

*Keywords:* filter; hindrance; electromagnetic sounding; correlator; ACF.

Классическое изображение четырехполюсника приведено на рисунке 1, а с токами направленными во внутрь, и напряжениями сверху – вниз (к земле, если есть заземление, потому часто четырехполюсник называют трехполюсником). Введем в рассмотрение параметры: безразмерные  $H_{11}$  и  $H_{22}$  на входе и выходе, соответственно  $Y_{12}$  – проводимость со входа на выход,  $Z_{21}$  – комплексное сопротивление с выхода на вход; отметим, что в общем случае все параметры являются комплексными величинами, а  $E_1$  и  $J_1$  – есть комплексные амплитуды напряжений и токов, соответственно, (т. е. со своими модулями и фазами); следовательно, все матричные схемы многополюсников справедливы только в установившемся состоянии, что является ограничением.

В задачах геоэлектроразведки (ГЭР) токи и напряжения считаются известными; а параметры – неизвестными (в классической радиотехнике – наоборот). Поэтому получаем систему двух уравнений с четырьмя неизвестными. Дополнительную систему уравнений второго порядка получаем при триангуляционном приеме на три (минимум на два) пункта приема (ПП) (см. рисунок 1, б); попарное использование из трех ПП дает  $C_3^2 = 3$  ( $C$  – число сочетаний) различных пар уравнений, всего их шесть.

Предполагая далее, что зондируется только первый слой и во всех направлениях параметры одинаковые, обозначая со штрихами токи и напряжения на другом пункте приема (например, на ПП2, а без штрихов на ПП1), последовательными подстановками из четырех уравнений с четырьмя неизвестными получаем:

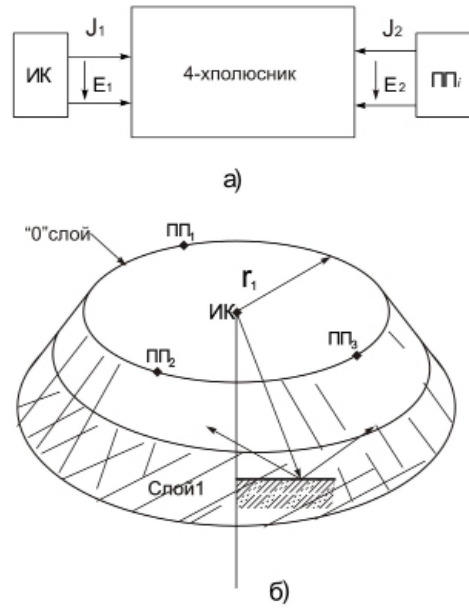


Рисунок 1 – Отраженный слой 1 как линейный 4-х полюсник (а).

Триангуляционный прием на три ПП<sub>i</sub>, i = 1,2,3 (б); r<sub>1</sub> – радиус окружности на поверхности (слой “0”)

$$\begin{cases} J_2 = J_1 \cdot H_{11} + E_1 \cdot Y_{12} \\ E_2 = J_1 \cdot Z_{21} + E_1 \cdot H_{22} \end{cases}, \begin{cases} J_2' = J_1' \cdot H_{11} + E_1' \cdot Y_{12} \\ E_2' = J_1' \cdot Z_{21} + E_1' \cdot H_{22} \end{cases}, \quad (1)$$

$$H_{11} = \frac{J_2 - E_1 \cdot Y_{12}}{J_1}, \quad Z_{21} = \frac{E_2 - E_1 \cdot H_{22}}{J_1}, \quad (2)$$

$$H_{11}' = \frac{J_2' - E_1' \cdot Y_{12}}{J_1'}, \quad Z_{21}' = \frac{E_2' - E_1' \cdot H_{22}}{J_1'}, \quad (3)$$

$$\frac{J_2 - E_1 \cdot Y_{12}}{J_1} = \frac{J_2' - E_1' \cdot Y_{12}}{J_1'}, \quad Y_{12} = \frac{J_1' \cdot J_2 - J_1 \cdot J_2'}{J_1' \cdot E_1 - E_1' \cdot J_1} = \frac{\left(\frac{J_1'}{J_1}\right) \cdot J_2 - J_2'}{J_1' \cdot \rho_{2E} - E_1'}, \quad \rho_{2E} = \frac{E_1}{J_1}; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_2 - E_1 \cdot H_{22}}{J_1} &= \frac{E_2' - E_1' \cdot H_{22}}{J_1'}, \\ H_{22} &= \frac{J_1' \cdot E_2 - J_1 \cdot E_2'}{J_1' \cdot E_1 - J_1 \cdot E_1'} = \frac{J_1' \cdot \rho_{\text{вых}} - E_2'}{\left(\frac{J_1'}{J_1}\right) \cdot E_1 - E_1'} = \frac{J_1' \cdot \rho_{\text{вых}} - E_2'}{J_1' \cdot \rho_{\text{ex}} - E_1'}, \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

$$\rho_{\text{вых}} = \frac{E_2}{J_1};$$

$$Z_{21} = \frac{E_2}{J_1} - \frac{E_2}{J_1} \cdot \left(\frac{J_1' \cdot E_2 - J_1 \cdot E_2'}{J_1' \cdot E_1 - J_1 \cdot E_1'}\right) = \rho_{\text{вых}} - \rho_{\text{ex}} \cdot \left(\frac{J_1' \cdot \rho_{\text{вых}} - E_2'}{J_1' \cdot \rho_{\text{ex}} - E_1'}\right) \neq Y_{12}^{-1}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= \frac{J_2}{J_1} - \frac{E_1 \cdot H_{22}}{J_1} = \frac{J_2}{J_1} - \rho_{2E} \cdot \left(\frac{J_1' \cdot \rho_{\text{вых}} - E_2'}{J_1' \cdot \rho_{\text{ex}} - E_1'}\right) = \frac{J_2}{J_1} - \left(\frac{\rho_{\text{вых}} - \rho_{\text{ex}}'}{\rho_{\text{ex}} - \rho_{\text{ex}}'}\right) \\ \rho_{\text{вых}}' &= \frac{E_2'}{J_1'}, \quad \rho_{\text{ex}}' = \frac{E_1'}{J_1'} \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

В (1) записаны исходные данные уравнений. В (2) представлены параметры из первой системы в (1), в (3) – из второй, причем для одних и тех же параметров, откуда приравняв (4), получаем  $Y_{12}$ , а из (5) –  $H_{22}$ ; затем из первой формулы в (2) имеем (6), а из первой же формулы в (3) получаем выражение (7). Обратим внимание, что  $Z_{21} \neq Y_{12}^{-1}$ ; а принятая за искомую переменную в ГЭР величина  $r_{\text{вых}} \neq Z_{21}$ , см. формулу (6); кроме того, ясно, почему в этих случаях не рекомендуется использовать правило Крамера, поскольку главные определители равны нулю, что видно из формул (4)–(7), поскольку в них знаменатели также могут быть нулевыми. Собственно, основной плюс и простота теории четырехполюсников проявляется только при анализе отражений от первого слоя до прихода отражений, как от второго слоя (десятки микросекунд), так и от третьего (доли миллисекунд до единиц мс); в этом случае в принципе можно скомпенсировать отражения от суммы сигналов от первого и второго слоя, а затем и от третьего, хотя оптимальные алгоритмы компенсации значительно сложнее [2].

**Импульсная характеристика и ее свойства.** Если известна импульсная характеристика четырехполюсника  $h(t)$ , то с использованием метода наложения (суммирования с запаздыванием) интеграла Дюамеля получаем для сигнала на выходе  $s_{\text{вых}}$  при подаче на вход сигнала  $s_{\text{вх}}$ :

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_0^2 s_{\text{вх}}(\tau)h(t-\tau)d\tau, \tag{8}$$

т. е. импульсная характеристика (ИХ) “образует” со входным сигналом интеграл взаимно-корреляционного типа – именно это обстоятельство положило основу автокорреляционного (АКФ) и взаимно-корреляционного (ВКФ) анализа во всей радиофизике и в др. науках. Обратим внимание на пределы интегрирования. Если  $a = \infty$ ,  $b = \infty$ , то имеется возможность использования интегралов Фурье (чаще говорят о формантах Фурье, прямой и обратной, соответственно):

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{вх}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\}. \tag{9}$$

Первая форманта есть комплексный спектр сигнала, обратное преобразование переводит спектр к исходному сигналу; главное – предположение о существовании сигнала на всей оси времени от  $-\infty$  до  $+\infty$  (неважно, если сигнал отличен от нуля на каком-то интервале); еще более важным ограничением является конечность энергии сигнала  $\mathcal{E} < \infty$ . Поэтому для периодических сигналов с бесконечной энергией оперировать можно только с конечной мощностью за период. Если в (8) нижний предел  $a = 0$ , то исследователя интересует переходной процесс в начальный момент времени; если  $b = T$ , то интерес представляет переходной процесс после момента времени  $T$ , где  $T$  – любое. Но переходные процессы есть прерогатива интеграла Лапласа, более сложного, чем преобразование Фурье, но к тому же более “мягкого”: энергия сигнала  $\mathcal{E} = C_1 e^{c_2 t}$ , где  $C_1$  и  $C_2$  есть некоторые константы; следовательно, энергия может расти, но не очень быстро.

Обратимся к рассмотрению основной формулы (8), и изложим нестандартный подход к анализу. Если входной сигнал есть дельта-функция  $\delta(t)$ , то, используя ее “фильтрующее” свойство, получаем выражение для  $h(t)$ :

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}, \quad S_{\text{вх}} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot h(t-\tau)d\tau = h(t - (\tau = 0)) = h(t), \tag{10}$$

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \exp(-i\omega \cdot t)dt = 1, \quad -\infty \leq \left(f = \frac{\omega}{2\pi}\right) \leq \infty, \quad \delta(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i\omega \cdot t)d\omega, \tag{11}$$

где спектр  $S_{\delta}(\omega)$  дельта-функции в (11) равен единице на всех частотах (начало координат в  $t = 0$ , иначе появляется фазовая составляющая), а из формулы (10) следует основной результат – при подаче на вход любой линейной цепи дельта-функции на выходе цепи всегда имеется импульсная характеристика (ИХ) этой цепи. Физически понятно: имея постоянный спектр на всех частотах, передаточная функция цепи  $K(\omega)$  “пропускает” на выход все частоты попадающие в полосу прозрачности цепи.

Теперь предстоит выяснить свойства комплексной передаточной функции цепи  $K(\omega)$ . Для этой цели подставим в (8) с бесконечными пределами функции (9), и, используя интегральное представление дельта-функции (11), получаем после очевидных преобразований:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{вых}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \cdot \exp(i\omega_1 \cdot \tau) d\omega_1 \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega_2) \cdot \exp(i\omega_2 \cdot (t-\tau)) d\omega_2 \right] = \\
 &\left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \cdot K(\omega_2) \cdot \exp(i\omega_2 \cdot t) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \cdot (\omega_1 - \omega_2) \cdot \tau) d\tau \right] d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &\left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \cdot K(\omega_2) \cdot \exp(i\omega_2 t) \cdot \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 \exp(i\omega_2 \cdot t) \cdot S(\omega_1) \cdot K(\omega_2)
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$S_{\text{вых}}(\omega) = S(\omega) K(\omega). \tag{13}$$

Последняя формула в (12) есть обратное преобразование Фурье от подынтегральной функции, откуда получаем хорошо известное выражение (13): спектр выходного сигнала линейной цепи равен произведению спектра  $S(\omega)$  входного сигнала на передаточную функцию цепи  $K(\omega)$ . Теперь найдем спектр произведения двух сигналов  $S_1(t_1)$  и  $S_2(t_2)$ . Используя преобразование Фурье (9), последовательно получаем для  $t_1 = t_2 \pm \tau$ :

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega \cdot t_1) \cdot s_1(t_1) \cdot s_1(t_1) dt_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega \cdot t_1) \cdot dt_1 \cdot \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1) \cdot \exp(i\omega_1 \cdot t_1) d\omega_1 \right] \cdot \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega_2) \cdot \exp(i\omega_2 (t_1 \pm \tau)) d\omega_2 \right] = \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1) \cdot S_2(\omega_2) \exp(i\omega_2 \cdot (\pm\tau)) \cdot \left[ \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \cdot t_1 \cdot (-\omega + \omega_1 + \omega_2)) dt_1 \right] d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1) \cdot S_2(\omega_2) \exp(i\omega_2 \cdot (\pm\tau)) \cdot \delta(-\omega + \omega_1 + \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 = \\
 &= \left( \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega_1) \cdot S_2(\omega - \omega_1) \exp(\pm i(\omega - \omega_1) \cdot \tau) d\omega_1.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Как видно из (14), спектр произведения двух различных сигналов в разные моменты времени равен свертке спектров этих сигналов с учетом времени запаздывания ( $-\tau$ ) или опережения ( $+\tau$ ) сигналов относительно друг друга. В частности, если  $\tau = 0$ , то получаем классическую теорему свертки спектров. Отметим, что формулы (12) – (14) позволяют получить все так называемые теоремы Фурье. В литературе, изданной в прошлом веке, весьма популярна была функция  $H(t)$  скачка (конечного, или типа Хэвисайда), равная интегралу от  $h(t)$  на интервале  $(0, t)$ . Авторы не отрицают, что, возможно, имеются задачи, где переходная функция  $H(t)$  “естественно” появляется в процессе анализа (неизбежно усложняющая все выводы и истолкования результатов). Не случайно в последние десятилетия переходная функция практически [3] не используется, и авторы настоятельно рекомендуют использовать именно импульсную характеристику  $h(t)$ , имеющую четкий физический смысл и отражающую характеристики различных слоев в ГЭР.

На рисунке 2, а представлена модель излучающего в ГЭР диполя (ИД), запитываемого от батареи конденсаторов Б, а на рисунке 2, в изображен импульс на выходе ИД (реальная проблема в ИД) на затухающем хвосте (после замыкания рубильника на рисунке 2, а).

Это явление легко пояснить, если учесть (после замыкания) емкость рубильника  $C_p$  и большого его сопротивления  $r_p$ , которые в эквивалентной схеме на рисунке 2, в можно пересчитать в виде малой емкости  $C_p$  соединенной последовательно с емкостью  $C_d$  диполя, что приводит к сильному увеличению собственной частоты диполя, смещает влево резонансную частоту (см. рисунок 2, г) и увеличивает добротность эквивалентного контура в силу увеличения сопротивления потерь. Если учесть, что в контуре была запасена значительная энергия, то при выключении батареи на хвосте импульса возникают значительные по амплитуде быстро затухающие колебания, устранить которые можно только “прямым” замыканием контура, что конструктивно выполнить для высоковольтного и сильноточного контура (к тому же синхронно) совсем непросто.

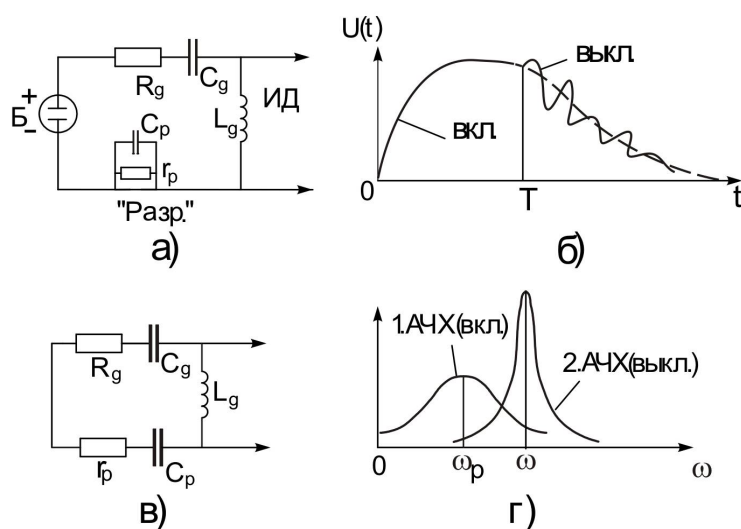


Рисунок 2 – Излучающий кабель (диполь в ГЭР) (а); сигнал при включении и выключении (б) источника питания Б; эквивалентная схема ИК после отключения питания (в); АЧХ 1 и 2 при включении и выключении “разрядника” (г)

**Выводы.** Основная формула (12) не встречается в известной литературе, но позволяет быстро найти все основные параметры апериодических, резонансных дифференцирующих цепей, а также интегрирующих цепей их комбинаций. Все названные цепи так или иначе используются в геоэлектроразведке (ГЭР) при исследовании отражений сигналов от различных слоев земной коры на различных глубинах. Главным ограничением является априорная неопределенность параметров отражений, которая заставляет изыскивать более адекватные методы анализа отражений.

#### Литература

1. Брагин В.Д. К проблемам отражений электромагнитных волн от многослойных сред / В.Д. Брагин, И.А. Голяницкий // Вестник КРСУ. 2008. Том 8. № 10. С. 27–33.
2. Проявление геодинамических процессов в геофизических полях / под ред. Е.П. Велихова, В.А. Зейгарника. М.: Наука, 1993. 158 с.
3. Голяницкий И.А. Математические модели и методы в радиосвязи / И.А. Голяницкий. М.: Эко-Трендз, 2005. 440 с.