

УДК 530.12

**ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КАРМИНАТИ–МАКЛЕНАХАНА
ДЛЯ ЗАКРЫТОЙ МОДЕЛИ ФРИДМАНА**

У.М. Иманалиев, Р. Молдонасилов

Исследовано поведение скалярных инвариантов Карминати–Макленахана в закрытой модели Вселенной, а также некоторые алгебраические соотношения между скалярными инвариантами.

Ключевые слова: метрика; модель Фридмана; тензор Римана; тензор Риччи; скалярные инварианты.

CARMINATI–MCLENAGHAN’S SCALAR INVARIANTS FOR FRIEDMANN’S CLOSED MODEL

U.M. Imanaliev, R. Moldonasirov

For closed Friedmann’s model it was investigated behavior of Carminati–McLenaghan’s scalar invariants and some algebraic relations between them and other scalar invariants.

Key words: metrics; Friedmann’s model; Riemann tensor; Ricci tensor; scalar invariants.

В настоящее время поиск подходов к созданию квантовой теории гравитации является одной из наиболее важных задач фундаментальной науки. Одним из таких подходов является исследование теплового ядра интегрального оператора. В этом подходе в эффективном лагранжиане возникают сложные комбинации скалярных инвариантов общей теории относительности. Поэтому исследование алгебраических соотношений между скалярными инвариантами упрощающими эффективный лагранжиан является важной задачей теоретической физики. Наиболее важным результатом в данном направлении является теорема Гаусса–Боне. В данной работе на основе простейшей космологической модели сделана попытка найти алгебраические соотношения между скалярными инвариантами общей теории относительности и базовыми скалярными инвариантами Карминати–Макленахана [1], играющими в некотором смысле роль базиса.

Все вычисления в работе проведены с помощью пакета символьных вычислений Mathematica и некоторых новых методик программирования, в частности с использованием пакета Notation. В статье используются общепринятые обозначения: по повторяющимся индексам производится суммирование, скорость света $c = 1$, производные по временной координате обозначаются точками над функцией, например \dot{a} ; $\dot{\ddot{a}}$.

Метрика закрытой модели Фридмана имеет вид [2, с. 463]:

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\varphi^2) \}. \quad (1)$$

Соответствующий метрический тензор g_{ik} с ковариантными компонентами имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a(\eta)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(\eta)^2 \sin^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(\eta)^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\chi) \end{pmatrix}$$

Корень квадратный из дискриминанта метрики равен:

$$\sqrt{-g} = a(\eta)^4 \sin(\theta) \sin^2(\chi). \quad (2)$$

Контрвариантные компоненты метрики g^{ik} имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a(\eta)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a(\eta)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a(\eta)^2 \sin^2(\chi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a(\eta)^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\chi)} \end{pmatrix}$$

Вычисляем символы Кристоффеля по общеизвестным формулам [2, с. 314]:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) \quad (3)$$

Приводим для справки их значения:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{a}}{a}; \quad \Gamma_{22}^0 = -\frac{\dot{a} \sin^2(\chi)}{a}; \quad \Gamma_{33}^0 = -\frac{\dot{a} \sin^2(\theta) \sin^2(\chi)}{a};$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{22}^1 = -\cos(\chi)\sin(\chi); \Gamma_{33}^1 = -\cos(\chi)\sin^2(\theta)\sin(\chi); \\ \Gamma_{02}^2 &= \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{12}^2 = \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)}; \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)}; \\ \Gamma_{33}^2 &= -\cos(\theta)\sin(\theta); \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{13}^3 = \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)}; \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}; \\ \Gamma_{30}^3 &= \frac{\dot{a}}{a}; \Gamma_{31}^3 = \frac{\cos(\chi)}{\sin(\chi)}; \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}; \end{aligned}$$

Тензор Римана вычисляется по формуле [2, с. 336]:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n \quad (4)$$

и имеет компоненты:

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}; \quad R_{202}^0 = \frac{(a\ddot{a} - \dot{a}^2)\sin^2(\chi)}{a^2}; \\ R_{303}^0 &= \frac{(a\ddot{a} - \dot{a}^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\chi)}{a^2}; \quad R_{010}^1 = \frac{\dot{a}^2 - a\ddot{a}}{a^2}; \\ R_{212}^1 &= \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 1\right)\sin^2(\chi); \quad R_{313}^1 = \frac{(a^2 + \dot{a}^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\chi)}{a^2}; \\ R_{002}^2 &= \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}; \quad R_{112}^2 = -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 1; \\ R_{323}^2 &= \frac{(a^2 + \dot{a}^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\chi)}{a^2}; \quad R_{003}^3 = \frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2}{a^2}; \\ R_{113}^3 &= -\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 1; \quad R_{223}^3 = -\frac{(a^2 + \dot{a}^2)\sin^2(\chi)}{a^2}; \end{aligned}$$

Тензор Риччи получается сверткой первого и третьего индекса тензора Римана [2, с. 339]:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3(\dot{a}^2 - a\ddot{a})}{a^2}; \quad R_{11} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} + 2; \\ R_{22} &= \frac{(2a^2 + \ddot{a}a + \dot{a}^2)\sin^2(\chi)}{a^2}; \\ R_{33} &= \frac{(2a^2 + \ddot{a}a + \dot{a}^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\chi)}{a^2}; \end{aligned}$$

Бесследовая часть тензора Риччи вычисляется по формуле [1]:

$$S_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R \quad (5)$$

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3\ddot{a}}{2a} + \frac{3}{2}; \quad S_{11} = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{2a} + \frac{1}{2}; \\ S_{22} &= \frac{(a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\sin^2(\chi)}{2a^2}; \end{aligned}$$

$$S_{33} = \frac{(a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2)\sin^2(\theta)\sin^2(\chi)}{2a^2};$$

Смешанные компоненты этого тензора имеют вид:

$$\begin{aligned} S_{00}^0 &= \frac{3(a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2)}{2a^4}; \quad S_{11}^1 = -\frac{a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{2a^4}; \\ S_{22}^2 &= -\frac{a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{2a^4}; \quad S_{33}^3 = -\frac{a^2 - \ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{2a^4}; \end{aligned}$$

Используя эти тензоры, определим действительные скалярные инварианты Карминати–Макленахана для закрытой модели Фридмана [1]:

1. Скалярная кривизна $R = R_i^i$:

$$R = \begin{pmatrix} 6(\ddot{a} + a) \\ -\frac{6}{a^3} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

2. Первый скалярный инвариант Карминати–Макленахана $R1 = \frac{1}{4}S_k^i \cdot S_i^k$:

$$R1 = \frac{3(2\dot{a}^2 - a\ddot{a} + a^2)^2}{4a^8} \quad (7)$$

3. Второй скалярный инвариант Карминати–Макленахана $R2 = -\frac{1}{8}S_k^i \cdot S_i^k \cdot S_i^l$:

$$R2 = \begin{pmatrix} 3(2\dot{a}^2 - a\ddot{a} + a^2)^3 \\ -\frac{3}{8a^{12}} \end{pmatrix} \quad (8)$$

4. Третий скалярный инвариант Карминати–Макленахана $R3 = \frac{1}{16}S_k^i \cdot S_i^k \cdot S_m^l \cdot S_l^m$:

$$R3 = \frac{21(2\dot{a}^2 - a\ddot{a} + a^2)^4}{64a^{16}} \quad (9)$$

Поведение скалярных инвариантов рассмотрим на примере “пылевидной” материи, для которой решение уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$\begin{cases} a = a_0(1 - \cos(\eta)); \\ t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin(\eta)); \end{cases}$$

Графики скалярных инвариантов Карминати–Макленахана в закрытой модели Вселенной, заполненной “пылевидным” веществом, приведены на рисунках 1–4.

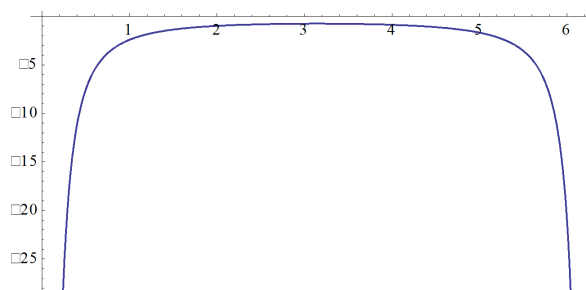


Рисунок 1 – Скалярная кривизна R (6)

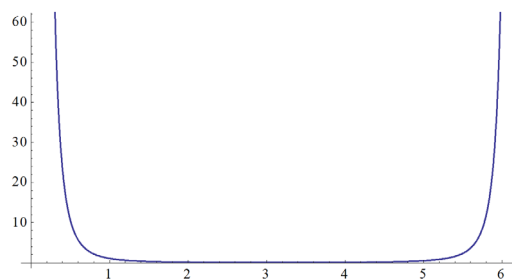


Рисунок 2 – Первый скалярный инвариант Карминати–Макленахана (7)

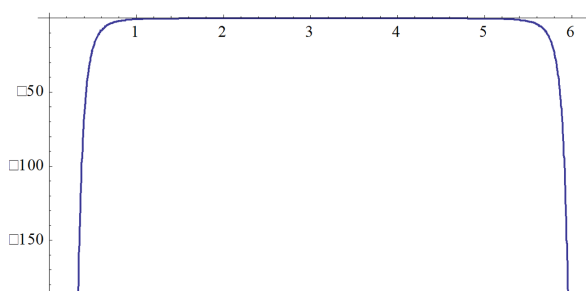


Рисунок 3 – Второй скалярный инвариант Карминати–Макленахана (8)

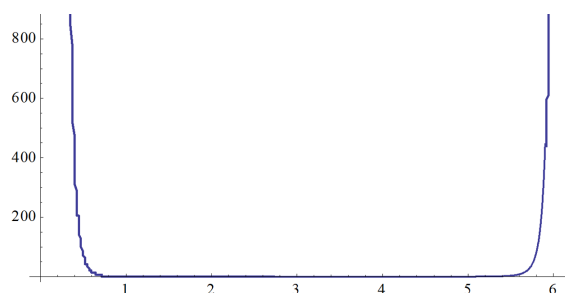


Рисунок 4 – Третий скалярный инвариант Карминати–Макленахана (9).

Рассмотрим алгебраическое соотношение между квадратом скалярной кривизны R , квадратом тензора Риччи $R_{ik}R^{ik}$ и квадратом тензора Римана $R_{iklm}R^{iklm}$. Согласно обобщенной формуле Гаусса–Боне выражение

$$\sqrt{-g} \{ R^2 - 4R_{ik}R^{ik} + R_{iklm}R^{iklm} \}$$

является полной дивергенцией или в случае закрытой космологической модели Фридмана, когда масштабный фактор зависит только от времени, полной производной по времени. Проверим это:

$$R^2 = \frac{36(\ddot{a} + a)^2}{a^6}$$

$$R_{ik}R^{ik} = \frac{12 \left(a^2 \left(\dot{a}^2 + \ddot{a}^2 \right) - a\dot{a}^2\ddot{a} + \dot{a}^4 + a^3\ddot{a} + a^4 \right)}{a^8}$$

$$R_{iklm}R^{iklm} = \frac{12 \left(a^2 \left(2\dot{a}^2 + \ddot{a}^2 \right) - 2a\dot{a}^2\ddot{a} + 2\dot{a}^4 + a^4 \right)}{a^8}$$

Подставляя в формулу Гаусса–Боне получаем:

$$R^2 - 4R_{ik}R^{ik} + R_{iklm}R^{iklm} = \left(\frac{24\dot{a}^2\ddot{a}}{a^3} - \frac{24\dot{a}^4}{a^4} - \frac{24\dot{a}^2\ddot{a}}{a^2} + \frac{24\ddot{a}}{a} \right) = 8 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\dot{a}^3}{a^3} + 3\frac{\dot{a}}{a} \right)$$

Таким образом, действия

$$S_1 = k_1 \int (R^2 - 4R_{ik}R^{ik}) \sqrt{-g} d^4x;$$

$$S_2 = k_2 \int R_{iklm}R^{iklm} \sqrt{-g} d^4x;$$

эквивалентны в том смысле, что лагранжианы этих действий отличаются на полную производную.

Литература

1. Carminati J. and McLenaghan R.G. // J. Math. Phys. 1991. 32: С. 3135–3140.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.