

УДК 517.97

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО РАЗРЕШИМОСТЬ

Э.Ф. Абдылдаева

Исследованы вопросы однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения специфического вида, которое появляется при решении многих задач нелинейной оптимизации колебательных систем с распределенными параметрами.

Ключевые слова: колебание; управление; нелинейное интегральное уравнение; функционал; оптимизация.

NONLINEAR INTEGRAL EQUATION
OF OPTIMAL CONTROL AND ITS SOLVABILITY

E.F. Abdylidaeva

The article examines questions of unique solvability of a nonlinear integral equation, which appears when solving many problems of nonlinear optimization of oscillatory systems with distributed parameters.

Key words: oscillation; control; nonlinear integral equation; functional; optimization.

1. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J[u(t)] = \int_0^1 \left\{ [V(T, x) - \xi_1(x)]^2 + [V_1(T, x) - \xi_2(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T l^2(t, u(t)) dt, \beta > 0, \quad (1.1)$$

где $\xi_1(x) \in H_1(Q)$, $\xi_2(x) \in H(Q)$, $l(t, u(t)) \in H(0, T)$, $l_u(t, u(t)) \neq 0$ – заданные функции, на множестве решений краевой задачи

$$V_u - AV = \lambda \int_0^T K(t, t) V(t, x) dt + g(t, x) f[t, u(t)], x \in Q \subset R^n, 0 < t \leq T, \quad (1.2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), V_1(0, x) = \psi_2(x), x \in Q, \quad (1.3)$$

$$\Gamma V(t, x) = \sum_{i,j=1,n} a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x) \cos(\delta, x_i) + a(x) V(t, x) = 0, x \in \gamma, 0 < t \leq T, \quad (1.4)$$

где A – эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t, x) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x) V(t, x),$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \geq c_0 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2, c_0 > 0,$$

δ – вектор нормали, исходящий из точки $x \in \gamma$; T – фиксированный момент времени, $K(t, \tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \tau \leq 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty,$$

т. е. является элементом гильбертова пространства $H(D)$;

$$g(t, x) \in H(Q_T), \psi_1(x) \in H_1(0, 1), \psi_2(x) \in H(0, 1), f_u[t, u(t)] \neq 0, \forall t \in (0, T) \quad (1.5)$$

заданные, а $a(x) \geq 0, c(x) \geq 0$ – известные измеримые функции; $u(t) \in H(0, T)$ функция управления, λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$.

В силу условий (1.5) краевая задача (1.2)–(1.4) при каждом фиксированном $u(t) \in H(0, T)$ имеет единственное обобщенное решение (см. статью Керимбеков А.К., Абдылдаева Э.Ф. в данном сборнике):

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x),$$

$$V_n(t) = \lambda \int_0^t R_n(t, s, \lambda) q_n(s) ds + q_n(t), \quad (1.6)$$

$$q_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} \sin \lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n(t - \tau) g_n(\tau) f[\tau, u(\tau)] d\tau.$$

Поскольку каждое управление $u(t)$ единственным образом определяет управляемый процесс $V(t, x)$, то управлению $u(t) + \Delta u(t)$ соответствует решение краевой задачи (1.2)–(1.4) вида $V(t, x) + \Delta V(t, x)$, где $\Delta V(t, x)$ приращение соответствующее приращению $\Delta u(t)$. Согласно методике вывода принципа максимума [1] приращение функционала (1.1) можно представить в виде

$$\Delta J[u] = J[u + \Delta u] - J[u] = - \int_0^T \Delta \Pi[t, V(t, x), \omega(t, x), u(t)] dt + \int_Q \Delta V^2(T, x) dx + \int_Q \Delta V_t^2(T, x), \quad (1.7)$$

где $\Pi(t, V(t, x), \omega(t, x), u(t)) = \int_Q g(t, x) \omega(t, x) dx f[t, u(t)] - \beta l^2(t, u(t))$,

а функция $\omega(t, x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_t - A \omega_{xx} = \lambda \int_0^t K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau, \quad x \in Q, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\omega(T, x) + 2[V_t(T, x) - \xi_2(x)] = 0, \quad \omega_t(T, x) - 2[V(T, x) - \xi_1(x)] = 0,$$

$$\Gamma \omega(t, x) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) \omega_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x) \omega(t, x) = 0. \quad (1.8)$$

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [1], оптимальное управление определяется из соотношений

$$\frac{2\beta l(t, u(t)) l_u(t, u(t))}{f_u[t, u(t)]} = \int_Q g(t, x) \omega(t, x) dx, \quad (1.9)$$

$$f_u[t, u(t)] \left(\frac{l(t, u(t)) l_u(t, u(t))}{f_u[t, u(t)]} \right)_u > 0, \quad (1.10)$$

которые называются условиями оптимальности.

2. Решение сопряженной краевой задачи

Решение сопряженной краевой задачи (1.8) ищем в виде ряда

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \quad (2.1)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ удовлетворяет соотношениям

$$\omega_n''(t) + \lambda_n^2 \omega_n(t) = -\lambda \int_0^t K(\tau, t) \omega_n(\tau) d\tau,$$

$$\omega_n(T) + 2[V_n'(T) - \xi_{2n}] = 0, \quad \omega_n'(T) - 2[V_n(T) - \xi_{1n}] = 0,$$

которые можно преобразовать к линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^t B_n(t, \tau) \omega_n(\tau) d\tau - 2[V_n'(T) - \xi_{2n}] \cos \lambda_n(T - t) + \frac{2}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_{1n}] \sin \lambda_n(T - t), \quad (2.2)$$

где ядро

$$B_n(t, \tau) = \frac{1}{\lambda_n} \int_t^T \sin \lambda_n(s-t) K(\tau, s) ds \text{ и } B_n(s, T) = 0. \quad (2.3)$$

Решение уравнение (2.2) находим [6] по формуле

$$\begin{aligned} \omega_n(t) = & 2[V_n'(T) - \xi_{2n}] \left\{ \lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \cos \lambda_n(T-\tau) d\tau + \cos \lambda_n(T-t) \right\} + \\ & + \frac{2}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_{1n}] \left\{ \lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \sin \lambda_n(T-\tau) d\tau + \sin \lambda_n(T-t) \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где резольвента $P_n(s, t, \lambda)$ ядра $B_n(s, t)$ имеет вид

$$P_n(t, \tau, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(t, \tau) \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

и при выполнении условия $|\lambda| < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \rightarrow \infty$ является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |P_n(s, t, \lambda)| & \leq \frac{\sqrt{T}}{\lambda_n^2 - |\lambda|TK_0} \left(\int_0^T K^2(s, \eta) d\eta \right)^{1/2}, \\ \text{или } \int_0^T |P_n(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau & \leq \frac{TK_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Нетрудно проверить, что $\omega(t, x)$ является элементом пространства $H(Q)$. Это следует из неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \omega^2(t, x) dx dt & = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x) \right)^2 dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2(t) dt \leq \\ & \leq 16 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [V_n'(T) - \xi_{2n}]^2 + \frac{1}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_{1n}]^2 \right\} \left[\frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} + 1 \right] dt = \\ & = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [V_n'(T) - \xi_{2n}]^2 + \frac{1}{\lambda_n} [V_n(T) - \xi_{1n}]^2 \right\} \left[\frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} + 1 \right] \int_0^T dt \leq \\ & \leq 32T \left[\frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} + 1 \right] \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} V_n'^2(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{2n}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(T) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{1n}^2}{\lambda_n^2} \right\} < \infty, \end{aligned}$$

которое имеет место в силу следующих соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n'^2(T) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(T) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{1n}^2 = \|\xi_1(x)\|_H^2 \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{2n}^2 = \|\xi_2(x)\|_H^2.$$

3. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления

Оптимальное управление находим согласно условиям оптимальности (1.9) и (1.10). Решение сопряженной краевой задачи (1.8), определяемое равенствами (2.1) и (2.2), подставим в (1.9). Сначала вычислим интеграл

$$\int_Q g(t, x) \omega(t, x) dx = \int_Q \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) z_n(x) \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t) z_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \omega_n(t)$$

и равенство (1.9) перепишем в виде

$$\frac{\beta l(t, u(t)) l_u(t, u(t))}{f_u[t, u(t)]} = -\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \left\{ 2[V'_n(T) - \xi_{2n}] \left(\lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \cos \lambda_n(T - \tau) d\tau + \cos \lambda_n(T - \tau) \right) + \right. \\ \left. + \left\{ 2[V'_n(T) - \xi_{2n}] \left(\lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \cos \lambda_n(T - \tau) d\tau + \cos \lambda_n(T - \tau) \right) \right\} \right\}.$$

Согласно (1.6) это равенство приводим к виду

$$\frac{\beta l(t, u(t)) l_u(t, u(t))}{f_u[t, u(t)]} = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda) \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, u(\tau)] ds + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t) h_n, \quad (3.1)$$

где $L_n^*(t, \lambda) = (g_n(t) \tilde{P}_n(t, \lambda), g_n(t) \tilde{\tilde{P}}_n(t, \lambda))$, (3.2)

$$\tilde{P}_n(t, \lambda) = \lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \cos \lambda_n(T - \tau) d\tau + \cos \lambda_n(T - \tau), \quad (3.3)$$

$$\tilde{\tilde{P}}_n(t, \lambda) = \lambda \int_0^T P_n(t, \tau, \lambda) \sin \lambda_n(T - \tau) d\tau + \sin \lambda_n(T - \tau),$$

$$G_n(\tau, \lambda) = \begin{pmatrix} g_n(t) \tilde{G}_n(\tau, \lambda) \\ g_n(t) \tilde{\tilde{G}}_n(\tau, \lambda) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения (3.1) и при этом должны выполняться условия (1.9) и (1.10). Условие (1.10) ограничивает класс функций внешних воздействий $f[t, u(t)]$. Поэтому будем считать, что функция $f[t, u(t)]$ удовлетворяет условию (1.10) для любого управления $u(t) \in H(0, T)$.

Нелинейные интегральные управления (3.1) решаются согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [2]. Положим

$$\frac{\beta l(t, u(t)) l_u(t, u(t))}{f_u[t, u(t)]} = p(t). \quad (3.5)$$

Лемма 4.1. Функция $p(t)$ является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. В силу условия (1.9) имеет место оценка

$$\sup \left| \frac{l_u(t, u(t))}{f_u(t, u(t))} \right| \leq M, \quad \forall t \in [0, T].$$

Так как $u(t) \in H(0, T)$, то утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T |p(t)|^2 dt \leq \beta \int_0^T |l(t, u(t))|^2 \cdot \left| \frac{l_u(t, u(t))}{f_u(t, u(t))} \right|^2 dt \leq \beta M^2 \int_0^T l^2(t, u) dt < \infty.$$

Согласно условию (1.10), из равенства (3.5) управление $u(t)$ определяется однозначно, т. е. существует функция φ такая, что

$$u(t) = \varphi(t, p(t), \beta). \quad (3.6)$$

В силу (3.5) и (3.6) уравнение (3.1) перепишем в виде

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda) \int_0^T G_n(s, \lambda) f[s, \varphi(s, p(s), \beta)] ds + \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t) h_n \quad (3.7)$$

или в операторной форме

$$p(t) = G[p(t)], \quad (3.8)$$

где $G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda) [h_n + \int_0^T G_n(\tau, \lambda) f[\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta)] d\tau]$. (3.9)

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (3.8).

Лемма 4.2. Оператор $G[p(t)]$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя, т. е. является элементом пространства $H(0, T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 \int_0^T G^2[p(t)]dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda)[h_n + \int_0^T G_n(\tau, \lambda)f[\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta)]d\tau] \right)^2 dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} (L_n^*(t, \lambda) \cdot h_n)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda) \int_0^T G_n^2(\tau, \lambda)f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta))d\tau \right)^2 \right) dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle L_n^*(t, \lambda), h_n \rangle \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle L_n^*(t, \lambda), \int_0^T G_n(\tau, \lambda)f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta))d\tau \right\rangle \right)^2 dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2} \|h_n\| \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2} \left\| \int_0^T G_n(\tau, \lambda)f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta))d\tau \right\| \right)^2 dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_0^T G_n(\tau, \lambda)f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta))d\tau \right\|^2 \right) dt \leq \\
 &\leq 2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2}^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \int_0^T G_n(\tau, \lambda)f(\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta))d\tau \right\|^2 \right) dt < \infty,
 \end{aligned}$$

которое имеет место в силу следующих неравенств

$$\begin{aligned}
 \|L_n^*(t, \lambda)\|_{R^2}^2 &\leq 4g_n^2(t) \left\{ 1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} \right\}, \\
 \|G_n(t, \lambda)\|_{R^2}^2 &\leq 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_n} \right) g_n^2(\tau) \left\{ 1 + \frac{T^2 K_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} \right\}, \\
 \|h_n(t, \lambda)\|_{R^2}^2 &\leq 4 \left\{ \xi_{1n}^2 + \xi_{1n}^2 + \psi_{1n}^2 + \lambda_n^2 \psi_{1n}^2 + 2T\lambda^2 \left[\psi_{1n}^2 + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \right] \frac{TK_0}{(\lambda_n - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} [1 + \lambda_n^2] \right\} < \infty.
 \end{aligned}$$

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия

$$\|f[t, u(t)] - f[t, \bar{u}(t)]\|_H \leq f_0 \|u(t) - \bar{u}(t)\|_H, \quad f_0 > 0 \quad (3.10)$$

$$\|\varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta]\|_H \leq \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \quad (3.11)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 8 \|g(t, x)\|_H^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} \right) \left(1 + \frac{T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda|T\sqrt{K_0})^2} \right) f_0 \varphi_0(\beta) < 1, \quad (3.12)$$

оператор $G[p]$ является сжимающим.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\begin{aligned}
 \int_0^T |G[p] - G[\bar{p}]| dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} L_n^*(t, \lambda) \int_0^T G_n(\tau, \lambda) (f[\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta)] - f[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)]) d\tau \right)^2 dt \leq \\
 &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{*2}(t, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T G_n^2(\tau, \lambda) ds \int_0^T (f[\tau, \varphi(\tau, p(\tau), \beta)] - f[\tau, \varphi(\tau, \bar{p}(\tau), \beta)])^2 d\tau dt \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq 8 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda| T \sqrt{K_0})^2} \right) \left(1 + \frac{T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda| T \sqrt{K_0})^2} \right) \|g(t, x)\|_H^4 f_0^2 \varphi_0^2(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H^2,$$

откуда находим, что

$$\|G(p) - G(\bar{p})\|_H \leq \left\{ 8 \left(1 + \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda| T \sqrt{K_0})^2} \right) \left(1 + \frac{T^2 K_0}{(\lambda_1 - |\lambda| T \sqrt{K_0})^2} \right) \right\}^{1/2} \|g(t, x)\|_H^2 \times \\ \times f_0 \varphi_0(\beta) \|p(t) - \bar{p}(t)\|_H.$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия (1.4)–(1.5), (1.14)–(1.15), (2.6), (3.5), (4.10)–(4.13). Тогда операторное уравнение (4.8) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.

Доказательство. Согласно Леммам 4.1 и 4.2 операторное уравнение (4.8) можно рассматривать в пространстве $H(0, T)$. Согласно Лемме 4.3 оператор $G(p)$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме [3] о принципе сжимающих отображений, оператор $G(p)$ имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (4.8) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (3.8) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. n -е приближение решения находится по формуле

$$p_n(t) = G[p_{n-1}(t)], n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $p_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0, T)$, причем имеет место оценка

$$\|p(t) - p_n(t)\| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} \|G[p_0(t)] - p_0(t)\|_H. \quad (3.13)$$

Точное решение $\bar{p}(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$\bar{p}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t).$$

Подставляя это решение в (3.6) находим искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \varphi[t, p(t), \beta]. \quad (3.14)$$

Оптимальный процесс $V^0(t, x)$, т. е. решение краевой задачи (1.1)–(1.5), соответствующее оптимальному управлению $u^0(t)$, согласно (1.6) находим по формуле

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) q_n(s) ds + q_n(t) \right) z_n(x). \quad (3.15)$$

Минимальное значение функционала (1.1) вычислим по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1 \left\{ [V^0(T, x) - \xi_1(x)]^2 + [V^0(T, x) - \xi_2(x)]^2 \right\} dx + \beta \int_0^T l^2(t, u^0(t)) dt. \quad (3.16)$$

Найденная тройка $(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0(t)])$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
2. Керимбеков А.К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
3. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.