УДК 517.968.21

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

А.К. Керимбеков, Э.Ф. Абдылдаева

Исследованы вопросы однозначной разрешимости краевой задачи управляемого колебательного процесса, описываемого фредгольмово интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. Разработан алгоритм построения слабо обобщенного решения краевой задачи, построены приближенные решения краевой задачи и доказана их сходимость.

Ключевые слова: краевая задача; обобщенное решение; приближенное решение; сходимость.

GENERALIZED SOLUTION OF THE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR THE PROCESS OF OSCILLATION DESCRIBED BY THE FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

A.K. Kerimbekov, E.F. Abdyldaeva

In this paper we have investigated one-valued solvability of the boundary value problem for the process of oscillation described by the Fredholm integro-differential equation in partial derivatives. We have developed algorithm for constructing of the generalized solution of the boundary value problem, as well as obtained its approximate solutions and proved their convergence.

Key words: boundary value problem; generalized solution; approximate solution; convergence.

1. Построение обобщенного решения краевой задачи

Пусть состояние колебательного процесса описывается скалярной функцией *V (t, x)*, которая в области $Q_T = Q\times\left(0,T\right]$, где Q – область пространства R^n ограниченная кусочно гладкой кривой γ, удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению [1, 2]

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + f[t,x,u(t,x)],\, x\in Q\subset R^n, 0<t\le T, \tag{1.1}$$

а на границах области Q начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\quad x\in \mathrm{Q}, \tag{1.2}$$

и граничному

$$\Gamma V(t,x) = \sum_{i,j=1,n}^{n} a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\delta,x_i) + a(x)V(t,x) = 0, x\in\gamma, 0<t\le T, \tag{1.3}$$

условиям, где A – эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i} - c(x)V(t,x),$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j \ge c_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, c_0>0,$$

δ – вектор нормали исходящий из точки $x \in \gamma$; T – фиксированный момент времени; $K(t,\tau)$ – заданная функция, которая определена в области $D = \{0 \le t \le 1, 0 \le \tau \le 1\}$ и удовлетворяет условию

$$\int_0^T\int_0^T K^2(t,\tau)\,d\tau dt = K_0 < \infty, \tag{1.4}$$

т. е. является элементом гильбертова пространства *H (D)*;

$$g(t,x) \in H(Q_T), \psi_1(x) \in H_1(0,1), \psi_2(x) \in H(0,1), f_u[t,u(t)] \ne 0, \forall\, \mathrm{t} \in (0,\mathrm{T}) \tag{1.5}$$

заданные, а $a(x) \ge 0, c(x) \ge 0$ – известные измеримые функции; $u(t) \in H(0,T)$ функция управления, λ – параметр, постоянная $\alpha > 0$.

Известно [3], что при ус ловиях (1.5) краевая задача (1.1)–(1.3) не имеет классического решения. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи (1.1)–(1.3).

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \tag{1.6}$$

где $V_n(t) = \langle V(t,x), z_n(x)\rangle = \int_Q V(t,x) z_n(x)dx$ коэффициенты Фурье.

Известно [4], что система функций $\{z_n(x)\}$, где $z_n(x)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$, удовлетворяет краевой задаче

$$Az(x) = -\lambda^2 z(x), \quad x \in Q, \Gamma z(x) = 0, \quad x \in \gamma,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяет следующим условиям: $\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \forall n = 1,2,3,...,\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$.

Определение 1.1. Под обобщенным решением краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $V(t,x) \in H(\mathrm{Q})$, которая удовлетворяет начальным условиям в слабом смысле, т. е. для любой функции имеет место равенство $\phi_0(x) \in H(Q), \phi_1(x) \in H(Q)$

$$\lim_{t\to+0}\int_Q V(t,x)\phi_0(x)dx = \int_Q \psi_1(x)\phi_0(x)dx, \quad \lim_{t\to+0}\int_Q V_t(t,x)\phi_1(x)dx = \int_Q \psi_2(x)\phi_1(x)dx,$$

и коэффициенты Фурье $V_n(t)$ удовлетворяют линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} V_n(t) = \psi_{1n}\cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n t + \lambda\int_0^T\Big(\int_0^t \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau\Big)V_n(s)ds + \\ +\int_0^t \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(t-\tau)g_n(\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n} и $g_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций ψ_1, ψ_2 и $g(t,x)$.

Для определения коэффициентов Фурье $V_n(t)$ уравнение (1.7) перепишем в виде

$$V_n(t) = \lambda\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)\,ds + q_n(t), \tag{1.8}$$

$$\text{где } K_n(t,s) = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)K(\tau,s)d\tau, \; K_n(0,s) = 0, \tag{1.9}$$

$$q_n(t) = \psi_{1n}cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_n t + \int_0^t \frac{1}{\lambda_n}sin\lambda_n(t-\tau)g_n(\tau)f[\tau,u(\tau)]d\tau. \tag{1.10}$$

Решение интегрального уравнения (1.8) находим [5] по формуле

$$V_n(t) = \lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)\,ds + q_n(t), \tag{1.11}$$

где $R_n\left(t,s,\lambda\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}\left(t,s\right),\ n=1,2,3,\ldots,$ (1.12)

резольвента ядра $K_n\left(t,s\right)\equiv K_{n,i}\left(t,s\right)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t,s)$ определяются по формуле

$$K_{n,i+1}\left(t,s\right)=\int_0^T K_n\left(t,\eta\right)K_{n,i}\left(\eta,s\right)d\eta,\ i=1,2,3,\ldots, \tag{1.13}$$

при каждом фиксированном n = 1, 2, 3, ... Исследуем сходимость ряда Неймана (1.12). Согласно (1.9) и (1.13) непосредственными вычислениями устанавливаются следующие оценки

$$|\,\mathrm{K}_{n,i}(t,s)\,|^2\le\frac{T^{2i-1}}{(\lambda_n^2)^i}K_0^{i-1}\int_0^T K^2(\tau,s)\,\mathrm{d}\,\tau. \tag{1.14}$$

Сходимости ряда Неймана (1.12) следуют из неравенства

$$\left|R_n(t,s,\lambda)\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left(\frac{T^{2i-1}}{\left(\lambda_n^2\right)^i}K_0^{i-1}\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left(\frac{T^{2i-1}}{\left(\lambda_n^2\right)^i}\frac{T}{T}K_0^{i-1}\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left(\frac{\left(T^2\right)^{i-1}}{\left(\lambda_n^2\right)^i}TK_0^{i-1}\right)^{1/2}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}=\sqrt{T}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left[\left(\sqrt{\frac{K_0T^2\lambda}{\lambda_n^2}}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{\lambda_n^2}\right)^{1/2}\right]\le$$

$$\le\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda\right|^{i-1}\left(\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}\right)^{i-1}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left|\lambda\right|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}\right)^{i-1}\le$$

$$\le\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\frac{1}{1-\left|\lambda\right|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}}=\frac{\sqrt{T}}{\lambda_n}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}\frac{\lambda_n}{\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}}=\frac{\sqrt{T}\left(\int_0^T K^2\left(\tau,s\right)ds\right)^{1/2}}{\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}},$$

которое справедливо для значений параметра λ, удовлетворяющих неравенству $\left|\lambda\right|\frac{T}{\lambda_n}\sqrt{K_0}<1$.

Непосредственным вычислением устанавливается неравенство

$$\int_0^T\left|R_n(t,s,\lambda)\right|^2ds\le\int_0^T\frac{T\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}{\left(\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2}ds=\frac{K_0T}{\left(\lambda_n-\left|\lambda\right|T\sqrt{K_0}\right)^2},$$

которое в дальнейшем используется неоднократно.

Отметим, что ряд Неймана, для значений параметра λ, удовлетворяющих условию

$$\left|\lambda\right|<\frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}}\underset{n\to\infty}{\to}\infty \tag{1.15}$$

абсолютно сходится при каждом $n=1,2,3,\ldots$ т. е. радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n. При этом резольвента $R_n\left(t,s,\lambda\right)$, как сумма абсолютно сходящегося ряда, является непрерывной функцией и удовлетворяет оценке

$$\left|R_n\left(t,s,\lambda\right)\right|\le\frac{TK_0}{\lambda_n-\left|\lambda\right|K_0T^2},\ n=1,2,3,\ldots. \tag{1.16}$$

Заметим, что при выполнении условия $|\lambda| < \dfrac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}}$ ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции при любом $n = 1, 2, 3, \ldots$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1)–(1.3) находим по формуле *(1.6),* где $V_n(t)$ определяется по формуле (1.11) как единственное решение интегрального уравнения (1.8). Легко проверить, что это решение удовлетворяет начальным условиям (1.2).

Теперь покажем, что это решение является элементом пространства $H(Q)$. Учитывая (1.9) и (1.10) непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T\int_Q V^2(t,x)dxdt = \int_0^T\int_Q (\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\, z_n(x))^2 dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t)dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds + q_n(t))^2 dt \le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds \int_0^T q_n^2(s)ds +$$

$$+q_n^2(t))dt = 2\{\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \frac{K_0 T}{(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2} \int_0^T q_n^2(s)dsdt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(t)dt\} \le$$

$$\le 2\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 \frac{K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2} \int_0^T q_n^2(s)ds + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt\} \le 2(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2}) \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt \le$$

$$\le 2(1 + \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 - |\lambda| T\sqrt{K_0})^2}) \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt;$$

Далее, учитывая неравенство

$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2(t)dt \le 3\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_{1n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2}\psi_{2n}^2 + \frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T q_n^2(\tau)d\tau \int_0^T f^2[\tau, u(\tau)]d\tau)dt \le$$

$$\le 3T[\sum_{n=1}^{\infty} \psi_{1n}^2 + (\|\psi_2(x)\|_H^2 + T\|g(\mathrm{t},x)\|_H^2 \|f[t,u(t)]\|_H^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2} =$$

$$= 3T(\|\psi_1(x)\|^2 + [\|\psi_2(x)\|_H^2 + T\|g(\mathrm{t},x)\|_H^2 \|f[t,u(t)]\|_H^2](\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6})) < \infty,$$

получим соотношение $\int_0^T\int_Q V^2(t,x)dxdt < \infty$, из которого следует, что $v(t,x) \in H(Q)$.

При определении функции $V_n(t)$, $n = 1,2,3,\ldots,$ по формуле $R_n(t,s,\lambda)$ (1.11)–(1.12) не всегда удается найти резольвенту. На практике чаще всего рассматривают приближения резольвенты. Усеченный ряд вида

$$R_n^m(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s),\ n = 1,2,3,..., \tag{1.17}$$

называется m-м приближением $R_n(t,s,\lambda)$ резольвенты при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$.

Функция $V_n^m(t)$, определяемая по формуле

$$V_n^m(t) = \lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds + q_n(t),\ n = 1,2,3,..., \tag{1.18}$$

называется m-м приближением функции $V_n(t)$ при каждом фиксированном $n = 1,2,3,\ldots$.

Согласно формулы (1.6), m-е приближение решения краевой задачи (1.1)–(1.3) $V(t,x)$ находим по формуле

$$V^m(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^m(t) z_n(x), \tag{1.19}$$

где $V_n^m(t)$ имеет вид (1.18). Покажем, что приближенное решение $V^m(t,x)$ краевой задачи (1.1)–(1.3) сходится к точному решению $V(t,x)$ по норме пространства $H(Q)$. С учетом (1.12), (1.14), (1.15), (1.17), (1.18) и неравенства

$$\int_{m+1}^{\infty} q^{x-1}dx = \frac{1}{q}\int_{m+1}^{\infty} q^x dx = q^{-1}\left(q^{m+1} + \frac{q^x}{lnq}\Big|_{m+1}^{\infty}\right) = q^{-1}q^{m+1}\left(1-\frac{1}{lnq}\right) = q^m\left(1-\frac{1}{lnq}\right), \quad 0<q<1$$

непосредственным вычислением имеем соотношение:

$$\| V(t,x) - V^m(t,x)\|_H^2 = \int_0^T\int_Q \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\int_0^T (R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda))q_n(s)ds)^2 z_n(x)\Big)dxdt =$$

$$= \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda\int_0^T (R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda))q_n(s)ds)^2\,dt \le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T (R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda)^2 ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt =$$

$$= \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T \Big(\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}|K_{n,i}(t,s)|\Big)^2 ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt \le$$

$$\le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^T \Big(\sum_{i=m+1}^{\infty}(|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n})^{i-1}\Big)^2\frac{T}{\lambda_n^2}\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds\int_0^T q_n^2(s)dsdt \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\lambda^2T^2K_0}{\lambda_n^2}\Big)\Big(\sum_{i=m+1}^{\infty}(|\lambda|\frac{T\sqrt{K_0}}{\lambda_n})^{i-1}\Big)^2\int_0^T q_n^2(s)\,\mathrm{ds} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(s)ds\Big(\sum_{i=m+1}^{\infty}(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1})^{i-1}\Big) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(s)ds\Big(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}\Big)^{2m}\Big(1-\frac{1}{\ln\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}}\Big)^2 \le \Big(1-\frac{1}{\ln\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}}\Big)^2\Big(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}\Big)^{2m}3T(\|\psi_1(x)\|_H^2 +$$

$$+[\|\psi_2(x)\|_H^2 + \|g(\mathrm{t},x)\|_H^2\|f[t,u(t)]\|_H^2](\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0, \qquad (1.20)$$

из которого следует сходимость приближенного решения при $m\to\infty$.

2. Приближенные решения краевой задачи и их сходимость

На производстве практически используемое приближенное решение определяется по формуле

$$V_k^m(t,x) = \sum_{n=1}^{k}V_n^m(t)z_n(x) = \sum_{n=1}^{k}(\lambda\int_0^T R_n^m(t,s,\lambda)q_n(s)ds + q_n(t)). \qquad (2.1)$$

Покажем, что это решение при $k\to\infty$ сходится к решению $V^m(t,x)$. Это следует из соотношения

$$\| V^m(t,x) - V_k^m(t)\|_H^2 = \int_0^T\int_Q \Big(\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda\int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} + \mathrm{q}_n(t)]z_n(x) -$$

$$-\sum_{n=1}^{k}[\lambda\int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} + \mathrm{q}_n(t)]z_n(x)\Big)^2 dxdt = \int_0^T\int_Q \Big(\sum_{n=k+1}^{\infty}[\lambda\int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} + \mathrm{q}_n(t)]z_n(x)\Big)^2 dxdt =$$

$$= \int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}[\lambda\int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda)q_n(\mathrm{s})\,\mathrm{ds} + \mathrm{q}_n(t)]^2 dt \le 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}[\lambda^2\int_0^T (R_n^m(t,s,\lambda))^2 ds\int_0^T q_n^2(s)ds + q_n^2(t)]dt \le$$

$$\leq 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}[\lambda^2\int_0^T R_n^2(t,s,\lambda)ds\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t)]dt \leq 2\int_0^T\sum_{n=k+1}^{\infty}[\frac{\lambda^2 K_0 T}{(\lambda_n-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2}\int_0^T q_n^2(s)ds+q_n^2(t)]dt \leq$$

$$\leq 2(1+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2})\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(t)dt \leq 6T(1+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2})(\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi_{2n}^2+$$

$$+\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(\tau)d\tau\,\|f[t,u(t)]\|_H^2)\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

так как остаточные суммы сходящихся рядов стремятся к нулю при $k\to\infty$.

Доказательство сходимости приближенных решений к точному решению $V(t,x)$ проведем по следующей схеме:

$$\|V(t,x)-V_k^m(t)\|_H \leq \|V(t,x)-V^m(t,x)\|_H+\|V^m(t,x)-V_k^m(t)\|_H.$$

Поскольку

$$\|V(t,x)-V^m(t,x)\|_H \leq (1-\frac{1}{\ln\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1}})^2(\frac{|\lambda|T\sqrt{K_0}}{\lambda_1})^{2m}(3T[\|\psi_1(x)\|_H^2+$$

$$+(\|\psi_2(x)\|_H^2+\|g(\mathrm{t},x)\|_H^2\|f[t,u(t)]\|_H^2)(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6})])^{1/2}\xrightarrow[m\to\infty]{}0$$

и

$$\|V^m(t,x)-V_k^m(t)\|_H \leq [6T(1+\frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-|\lambda|T\sqrt{K_0})^2})(\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi_{1n}^2+\sum_{n=k+1}^{\infty}\psi_{2n}^2+$$

$$+\sum_{n=k+1}^{\infty}\int_0^T q_n^2(\tau)d\tau\,\|f[t,u(t)]\|_H^2)]^{1/2}\xrightarrow[k\to\infty]{}0,$$

то приближенное решение $V_k^m(t,x)$ сходится к точному решению $V(t,x)$ при $m,k\to\infty$.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Васильева А.Б.* Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, А.Н. Тихонов. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
5. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.