УДК 517.968.22

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А.К. Керимбеков, Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейного граничного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи оптимизации.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений.

SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR CONTROL PROBLEM FOR THE THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.K. Kerimbekov, Seidakmat kyzy E.

The article deals with the investigated questions of solvability of the nonlinear boundary optimal control problem for the thermal processes, described by Volterra integro-differential equations. The sufficient conditions for the unique solvability of the optimization problem have been established.

Key words: boundary value problem; the functional; the optimal control; system of nonlinear integral equations.

I. Постановка задачи оптимального управления и условия оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный интегральный функционал

$$J\left[u\left(t\right)\right]=\int_0^1\left[\nu\left(T,x\right)-\xi\left(x\right)\right]^2dx+\beta\int_0^T(u_1^2\left(t\right)+u_2^2\left(t\right))dt,\quad \beta>0 \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1–3]:

$$\nu_t=\nu_{xx}+\lambda\int_0^t K\left(t,\tau\right)\nu\left(\tau,x\right)d\tau+g\left(t,x\right),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T, \tag{2}$$

$$\nu\left(0,x\right)=\psi\left(x\right),\quad 0<x<1, \tag{3}$$

$$\nu_x\left(t,0\right)=p_1\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right],\qquad 0<t\le T,$$

$$\nu_x\left(t,1\right)+\alpha\nu\left(t,1\right)=p_2\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right],\ 0<t\le T. \tag{4}$$

Здесь $\xi(x)\in H(0,1)$, $g(t,x)\in H(Q)$, $\psi(x)\in H(0,1)$ – заданные функции, $\overline{u}(t)=u_1(t),\ u_2(t)$, $\overline{u}(t)\in H^2(0,T)$ – вектор-функция управления, функции $p_1\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right]$, $p_2\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right]\in H\left(0,T\right)$ нелинейно зависят от вектор-функции управления и по функциональной переменной $\overline{u}(t)$ удовлетворяет условию

$$D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_1}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial p_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_2}{\partial u_2}\end{vmatrix}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T], \tag{5}$$

ядро *K (t,τ)* – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|,\quad D=\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\}, \tag{6}$$

λ – параметр, постоянная $\alpha>0$, *T*, – фиксированный момент времени, *H (Y)* – гильбертово пространство функций, определенных на множестве *Y*.

Подробное исследование краевой задачи было приведено в статье [4].

Оптимальное управление, согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [5], определяется из следующих соотношений

$$\begin{cases}\Pi_{u_1}(\cdot,u_1,u_2)=-\omega(t,0)\dfrac{\partial p_1}{\partial u_1}+\omega(t,1)\dfrac{\partial p_2}{\partial u_1}-2\beta u_1=0,\\ \Pi_{u_2}(\cdot,u_1,u_2)=-\omega(t,0)\dfrac{\partial p_1}{\partial u_2}+\omega(t,1)\dfrac{\partial p_2}{\partial u_2}-2\beta u_2=0,\end{cases} \tag{7}$$

$$\Pi_{u_1u_1}(\cdot,u_1,u_2)<0,\qquad \begin{vmatrix}\Pi_{u_1u_1}(\cdot,u_1,u_2) & \Pi_{u_1u_2}(\cdot,u_1,u_2)\\ \Pi_{u_2u_1}(\cdot,u_1,u_2) & \Pi_{u_2u_2}(\cdot,u_1,u_2)\end{vmatrix}>0, \tag{8}$$

где

$$\Pi\left[t,v(t,x),\omega(t,x),u_1(t),u_2(t)\right]=$$
$$=-\omega(t,0)\,p_1\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]+\omega(t,1)\,p_2\left[t,u_1(t),u_2(t)\right]-\beta\left(u_1^2(t)+u_2^2(t)\right),$$

а функция *ω (t,x)* определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{gathered}\omega_t+\omega_{xx}+\lambda\int_t^T K(\tau,t)\,\omega(\tau,x)\,d\tau=0;\quad 0<x<1;0\le t<T\\ \omega(T,x)+2\left[v(T,x)-\xi(x)\right]=0;\quad 0<x<1\\ \omega_x(t,0)=0;\quad \omega_x(t,1)+\alpha\omega(t,1)=0;\quad 0\le t<T\end{gathered} \tag{9}$$

и имеет вид

$$\omega(t,x)=-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda)\left[v_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds-2\left[v_n(T)-\xi_n\right]e^{-\lambda_n^2(T-t)}\right)z_n(x), \tag{10}$$

$$v_n(T)=\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\,a_n(s)\,ds+a_n(T). \tag{11}$$

С учетом (10) и (11) перепишем условия оптимальности (7).

$$\begin{aligned}&\beta D^{-1}\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}G_n^*(t,0)\\ G_n^*(t,1)\end{pmatrix}\int_0^T(G_n(\tau,0),G_n(\tau,1))\begin{pmatrix}p_1(\tau,u_1(\tau),u_2(\tau))\\ p_2(\tau,u_1(\tau),u_2(\tau))\end{pmatrix}d\tau=\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}G_n^*(t,0)\\ G_n^*(t,1)\end{pmatrix}h_n,\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$h_n=\xi_n-\psi_n\left(e^{-\lambda_n^2T}+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2s}ds\right)-\int_0^T G_n(\tau)g_n(\tau)d\tau; \tag{13}$$

$$G_n(t)z_n(1) = z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right) = G_n(t,1);$$
$$G_n(t)z_n(0) = -z_n(0)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right) = G_n(t,0); \tag{14}$$
$$G_n^*(t)z_n(1) = z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right) = G_n^*(t,1);$$
$$G_n^*(t)z_n(0) = -z_n(0)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right) = G_n^*(t,0). \tag{15}$$

II. Исследование разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений векторного оптимального управления

Для исследования однозначной разрешимости уравнения (12) сначала его перепишем в виде

$$\beta D^{-1}\left(\frac{\tilde p}{\tilde u}\right)\tilde u(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\int_0^T \tilde G_n^*(\tau,0,1)\,\tilde p(t,\tilde u(t))\,d\tau = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\,h_n, \tag{16}$$

где

$$\tilde u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t)\end{pmatrix},\quad \tilde G_n(t,0,1) = \begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1)\end{pmatrix},\quad \tilde G_n^*(t,0,1) = \left(G_n^*(t,0),\ G_n^*(t,1)\right),$$
$$\tilde p(t,\tilde u(t)) = \begin{pmatrix} p_1(t,u_1(t),u_2(t)) \\ p_2(t,u_1(t),u_2(t))\end{pmatrix},\quad D^{-1}\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right) = D^{-1}\left(\frac{\tilde p}{\tilde u}\right)$$

* – знак транспонирования.

Нелинейное интегральное уравнение (16) решается согласно методике, разработанной проф. А. Керимбековым [6]. Положим

$$\beta D^{-1}\left(\frac{\tilde p}{\tilde u}\right)\tilde u(t) = \begin{pmatrix}\theta_1(t) \\ \theta_2(t)\end{pmatrix} = \tilde\theta(t). \tag{17}$$

Согласно условию (5) это равенство однозначно разрешается относительно вектор-функции *ũ (t)*, т. е. имеет место равенство

$$\tilde u(t) = \tilde\varphi\left[t,\tilde\theta(t),\beta\right] = \begin{pmatrix}\varphi_1\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right] \\ \varphi_2\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right]\end{pmatrix}. \tag{18}$$

С учетом (17)–(18) уравнение (16) перепишем в операторной форме

$$\tilde\theta(t) = \tilde G\left[\tilde\theta(t)\right], \tag{19}$$

где

$$\tilde G\left[\tilde\theta(t)\right] = -\overline{G}\left[\tilde\theta(t)\right] + \hbar(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\int_0^T \tilde G_n^*(\tau,0,1)\,\tilde p\left(t,\tilde\varphi\left[t,\tilde\theta(t),\beta\right]\right)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\,h_n.$$

Далее исследуем вопросы разрешимости уравнения (19).

Лемма 1. $\hbar(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\,h_n \in H^2(0,T) = H(0,T)\times H(0,T).$

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\int_0^T \hbar(t)^2\,dt = \int_0^T\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\,h_n\right\|^2 dt \le \int_0^T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\tilde G_n(t,0,1)\right\|\left|h_n\right|\right)^2 dt \le \int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\tilde G_n(t,0,1)\right\|^2\sum_{n=1}^{\infty}\left|h_n\right|^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\| G_n^2(t,0,1) \right\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} |h_n|^2 \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \tilde{G}_n(t,0,1) \right\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 dt \le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(G_n^2(t,0) + G_n^2(t,1) \right) dt \sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \le$$

$$\le 3\left(\|\xi(x)\|_H^2 + 2\|\psi(x)\|_H^2 \left(1 + \frac{|\lambda| K_0 M_0}{\left(2\lambda_1^2\right)^2} \right) + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) \|g(t,x)\|_H^2 \right) < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 2. При выполнении условия $\tilde{p}(t,\tilde{u}(t)) \in H^2(0,T), \quad \forall \tilde{u}(t) \in H^2(0,T)$ оператор $\overline{G}[\theta]$, действующий по формуле

$$\overline{G}[\theta] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t,0,1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau,0,1)\, \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]\right) d\tau,$$

является элементом пространства $H^2(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением получим неравенство

$$\int_0^T \left\| \overline{G}[\theta] \right\|^2 dt = \int_0^T \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{G}_n(t,0,1) \int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau,0,1)\, \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]\right) d\tau \right\|^2 dt \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left\| \tilde{G}_n(t,0,1) \right\|^2 dt \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T \left\| \tilde{G}_n^*(\tau,0,1) \right\|^2 d\tau \int_0^T \left\| \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]\right) \right\|^2 d\tau \le 1$$

$$\le 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \left\| \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]\right) \right\|_{H^2}^2 < \infty,$$

из которого следует утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть $\tilde{\theta}(t) \in H^2(0,T)$ и каждая из функций $\tilde{p}\left[t, \tilde{u}(t)\right]$ и $\tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]$ по функциональному аргументу удовлетворяет условию Липшица т. е.

$$\left\| \tilde{p}\left[t, \tilde{u}(t)\right] - \tilde{p}\left[t, \tilde{\tilde{u}}(t)\right] \right\|_{H^2} \le p_0 \left\| \tilde{u}(t) - \tilde{\tilde{u}} \right\|_{H^2}, \quad p_0 > 0, \tag{20}$$

$$\left\| \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right] - \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\tilde{\theta}}(t), \beta\right] \right\|_{H^2} \le \varphi_0(\beta) \left\| \tilde{\theta}(t) - \tilde{\tilde{\theta}}(t) \right\|_{H^2}, \quad \varphi_0(\beta) > 0. \tag{21}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma = 2 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) < 1 \tag{22}$$

оператор $G[\cdot] = G_0[\cdot] + \hbar$ является сжимающим.

Доказательство. Учитывая вычисления, полученные при доказательстве леммы 2, имеем неравенство:

$$\left\| \tilde{G}[\tilde{\theta}] - \tilde{G}[\overline{\theta}] \right\|_{H^2}^2 \le 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 \left\| \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \tilde{\theta}(t), \beta\right]\right) - \tilde{p}\left(t, \tilde{\varphi}\left[t, \overline{\theta}(t), \beta\right]\right) \right\|_{H^2}^2 \le$$

$$\le 4\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right)^2 p_0^2 \varphi_0^2(\beta) \left\| \tilde{\theta}(t) - \overline{\theta}(t) \right\|_{H^2}^2,$$

из которого следует, что

$$\left\| \tilde{G}[\tilde{\theta}] - \tilde{G}[\overline{\theta}] \right\|_{H^2} \le \gamma \left\| \tilde{\theta}(t) - \overline{\theta}(t) \right\|_{H^2},$$

где $\gamma = 2 p_0 \varphi_0(\beta) \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)\left(1 + \frac{|\lambda| T K_0 M_0}{2\lambda_1^2} \right) < 1.$

Следовательно, оператор $\tilde{G}[\cdot]$ является сжимающим [7].

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. $\overline{p}\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right]\in H^{2}\left(0,T\right),\quad \forall\overline{u}\left(t\right)\in H^{2}\left(0,T\right);$

2. $D\left(\dfrac{\overline{p}\left(t,\overline{u}\right)}{\overline{u}}\right)\neq 0,\quad \forall t\in\left[0,T\right];$

3. $\left\|\tilde{p}\left[t,\tilde{u}\left(t\right)\right]-\tilde{p}\left[t,\tilde{\tilde{u}}\left(t\right)\right]\right\|_{H^{2}}\leq p_{0}\left\|\tilde{u}\left(t\right)-\tilde{\tilde{u}}\right\|_{H^{2}},\quad p_{0}>0;$

4. $\left\|\tilde{\varphi}\left[t,\tilde{\theta}\left(t\right),\beta\right]-\tilde{\varphi}\left[t,\overline{\theta}\left(t\right),\beta\right]\right\|_{H^{2}}\leq\varphi_{0}\left(\beta\right)\left\|\tilde{\theta}\left(t\right)-\overline{\theta}\left(t\right)\right\|_{H^{2}},\quad \varphi_{0}\left(\beta\right)>0.$

Тогда, при выполнении условия

$$\gamma=2p_{0}\varphi_{0}\left(\beta\right)\left(\frac{1}{\lambda_{1}^{2}}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{\left|\lambda\right|TK_{0}M_{0}}{2\lambda_{1}^{2}}\right)<1,$$

операторное уравнение (19) имеет единственное решение $\overline{\theta}\left(t\right)\in H^{2}\left(0,T\right)$.

Доказательство. Согласно *Леммам 1* и *2* операторное уравнение (19) можно рассматривать в пространстве H^2 *(0,T)*. Согласно *Лемме 3* оператор $G\left(\theta\right)$ является сжимающим. Поскольку гильбертово пространство H^2 *(0,T)* является полным метрическим пространством, то согласно теореме [7] о принципе сжимающих отображений оператор $\tilde{G}\left[\tilde{\theta}\left(t\right)\right]$ имеет единственную неподвижную точку, т. е. операторное уравнение (19) имеет единственное решение.

Решение операторного уравнения (19) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. *n*-е приближение решения находится по формуле

$$\tilde{\theta}_{n}\left(t\right)=\tilde{G}\left[\tilde{\theta}_{n-1}\left(t\right)\right],\quad n=1,2,3,\ldots,\qquad \tilde{\theta}\left(t\right)=\lim_{n\to\infty}\theta_{n}\left(t\right),$$

где $\tilde{\theta}_{0}\left(t\right)$произвольный элемент пространства H^2 *(0,T)* и удовлетворяет оценке

$$\left\|\tilde{\theta}_{0}\left(t\right)-\theta_{n}\left(t\right)\right\|_{H^{2}}\leq\frac{\gamma^{n}}{1-\gamma}\left\|\overline{G}\left[\theta_{0}\left(t\right)\right]-\theta_{0}\left(t\right)+\hbar\left(t\right)\right\|_{H^{2}}\tilde{\theta}\left(t\right).\tag{23}$$

Если принять , то эта оценка (23) примет вид

$$\left\|\tilde{\theta}_{0}\left(t\right)-\theta_{n}\left(t\right)\right\|_{H^{2}}\leq\frac{\gamma^{n}}{1-\gamma}\left\|\overline{G}\left[\theta_{0}\left(t\right)\right]\right\|_{H^{2}}.$$

Найденное решение $\tilde{\theta}\left(t\right)$, подставляя в формулу (18) решение нелинейного интегрального уравнения (17) находим по формуле

$$u^{0}\left(t\right)=\tilde{\varphi}\left[t,\tilde{\theta}\left(t\right),\beta\right]=\begin{pmatrix}\varphi_{1}\left[t,\theta_{1}\left(t\right),\theta_{2}\left(t\right),\beta\right]\\ \varphi_{2}\left[t,\theta_{1}\left(t\right),\theta_{2}\left(t\right),\beta\right]\end{pmatrix}.\tag{24}$$

Оптимальный процесс v^0 *(t,x)* определяется по формуле

$$v^{0}\left(t,x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_{0}^{t}R_{n}\left(t,s,\lambda\right)\left(e^{-\lambda_{n}^{2}s}\psi_{n}+\int_{0}^{s}e^{-\lambda_{n}^{2}(s-\tau)}\left(g_{n}\left(\tau\right)+z_{n}^{*}(0,1)\overline{p}\left[\tau,u^{0}(\tau)\right]\right)d\tau\right)ds+\right.$$

$$\left.+e^{-\lambda_{n}^{2}t}\psi_{n}+\int_{0}^{t}e^{-\lambda_{n}^{2}(t-\tau)}\left(g_{n}\left(\tau\right)+z_{n}^{*}(0,1)\overline{p}\left[\tau,u^{0}(\tau)\right]\right)d\tau\right]z_{n}\left(x\right),$$

а минимальное значение функционала вычисляется по формуле

$$J[u^{0}(t)]=\int_{0}^{1}\left[v^{0}(T,x)-\xi(x)\right]^{2}dx+\beta\int_{0}^{T}\left(u_{1}^{2}\left(t\right)+u_{2}^{2}\left(t\right)\right)dt.$$

Управление u^0 *(t)* может претендовать на “оптимальность” лишь тогда, когда на этом управлении выполняется второе условие оптимальности (18). Проверка выполнения условия оптимальности в виде (18), сопряжено с некоторыми трудностями (порою даже непреодолимые). Это связано с присутствием функции *ω (t,0)* и *ω (t,1)*, т. е. решения сопряженной краевой задачи. В этой связи второе условие оптимальности преобразуем к виду удобного для проверки этого условия.

С этой целью рассмотрим матрицу Гесса функции $\Pi\,(u_1,u_2)$

$$\Gamma\left(\Pi\left(\cdot,u_{1},u_{2}\right)\right)=\begin{pmatrix}\Pi_{u_{1}u_{1}}\left(\cdot,u_{1},u_{2}\right) & \Pi_{u_{1}u_{2}}\left(\cdot,u_{1},u_{2}\right)\\ \Pi_{u_{2}u_{1}}\left(\cdot,u_{1},u_{2}\right) & \Pi_{u_{2}u_{2}}\left(\cdot,u_{1},u_{2}\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\omega(t,0)\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2}+\omega(t,1)\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2}-2\beta & -\omega(t,0)\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1\partial u_2}+\omega(t,1)\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1\partial u_2} \\ -\omega(t,0)\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2\partial u_1}+\omega(t,1)\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2\partial u_1} & -\omega(t,0)\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2}+\omega(t,1)\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2}-2\beta \end{pmatrix}=$$

$$=\left\{-\omega(t,0)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2\partial u_1} & \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2}\end{pmatrix}+\omega(t,1)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2\partial u_1} & \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2}\end{pmatrix}\right\}-2\beta E=$$

$$=\left\{-\omega(t,0)\,\Gamma\left[p_1(u_1,u_2)\right]+\omega(t,1)\,\Gamma\left[p_2(u_1,u_2)\right]\right\}-2\beta E=$$

=| Заменяем вектор по формуле (3.3.1)|=

$$=\left(\Gamma\left[p_1(u_1,u_2)\right],\quad \Gamma\left[p_2(u_1,u_2)\right]\right)2\beta\left(D^*\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)^{-1}\tilde{u}(t)-2\beta E=$$

$$=2\beta\left(\left(\Gamma\left[p_1(u_1,u_2)\right],\quad \Gamma\left[p_2(u_1,u_2)\right]\right)\left(D^*\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)^{-1}\tilde{u}(t)-E\right)=$$

$$=2\beta\left(\frac{1}{\left|D\left(\dfrac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}\left(\Gamma\left[p_1(u_1,u_2)\right],\quad \Gamma\left[p_2(u_1,u_2)\right]\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial p_2}{\partial u_2}u_1 & -\dfrac{\partial p_2}{\partial u_1}u_2 \\ -\dfrac{\partial p_1}{\partial u_2}u_1 & \dfrac{\partial p_1}{\partial u_1}u_2\end{pmatrix}-E\right)=$$

$$=2\beta\left(\frac{1}{\left|D\left(\dfrac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}\left\{\left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1}u_2+\frac{\partial p_2}{\partial u_2}u_1\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2\partial u_1}\end{pmatrix}+\left(-\frac{\partial p_2}{\partial u_1}u_2+\frac{\partial p_2}{\partial u_2}u_1\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_1\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2}\end{pmatrix}\right\},\right.$$

$$\left.\frac{1}{\left|D\left(\dfrac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}\left\{\left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2}u_1+\frac{\partial p_1}{\partial u_1}u_2\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2} \\ \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2\partial u_1}\end{pmatrix}+\left(-\frac{\partial p_1}{\partial u_2}u_1+\frac{\partial p_1}{\partial u_1}u_2\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_1\partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2}\end{pmatrix}\right\}-E\right).$$

Следовательно,

$$\Pi_{u_1u_1}(\cdot,u_1,u_2)=\left[\left(-u_2\frac{\partial p_2}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial p_2}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1^2}+\left(u_2\frac{\partial p_1}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial p_1}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1^2}\right]\frac{1}{\left|D\left(\dfrac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}-1;$$

$$\Pi_{u_1u_2}(\cdot,u_1,u_2)=\left[\left(-u_2\frac{\partial p_2}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial p_2}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_1}{\partial u_1\partial u_2}+\left(u_2\frac{\partial p_1}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial p_1}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_2}{\partial u_1\partial u_2}\right]\frac{1}{\left|D\left(\dfrac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|};$$

$$\Pi_{u_2u_1}\left(\cdot,u_1,u_2\right)=\left[\left(-u_2\frac{\partial p_2}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial p_2}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2\partial u_1}+\left(u_2\frac{\partial p_1}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial p_1}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2\partial u_1}\right]\frac{1}{\left|D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|};$$

$$\Pi_{u_2u_2}\left(\cdot,u_1,u_2\right)=\left[\left(-u_2\frac{\partial p_2}{\partial u_1}+u_1\frac{\partial p_2}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_1}{\partial u_2^2}+\left(u_2\frac{\partial p_1}{\partial u_1}-u_1\frac{\partial p_1}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 p_2}{\partial u_2^2}\right]\frac{1}{\left|D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}-1,$$

где $\frac{1}{\left|D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\right|}=\frac{\partial p_1}{\partial u_1}\frac{\partial p_2}{\partial u_2}-\frac{\partial p_1}{\partial u_2}\frac{\partial p_2}{\partial u_1}\neq 0$ (25)

Матрица Гесса функции $\Pi\,(u_1,\,u_2)$ является симметричной, т. е.

$$\Pi_{u_1u_2}\left(\cdot,u_1,u_2\right)=\Pi_{u_2u_1}\left(\cdot,u_2,u_1\right).$$

Согласно критерию Сильвестра, в критической точке максимум функции $\Pi\,(u_1,\,u_2)$ достигается при выполнении условий

$$\Pi_{u_1u_1}\left(\cdot,u_1,u_2\right)<0, \tag{26}$$

$$\begin{vmatrix}\Pi_{u_1u_1}\left(\cdot,u_1,u_2\right) & \Pi_{u_2u_1}\left(\cdot,u_1,u_2\right)\\ \Pi_{u_1u_2}\left(\cdot,u_1u_2\right) & \Pi_{u_2u_2}\left(\cdot,u_1,u_2\right)\end{vmatrix}=\left(\Pi_{u_1u_1}\left(\cdot,u_1,u_2\right)\Pi_{u_2u_2}\left(\cdot,u_1,u_2\right)-\left(\Pi_{u_1u_2}\left(\cdot,u_1,u_2\right)\right)^2\right)>0. \tag{27}$$

Таким образом, оптимальность векторного управления $\overline{u}^0(t)$ можно проверить согласно новым условиям (26)–(27), которые так же назовем условиями оптимальности.

Найденная тройка $\left(u^0\left(t\right),v^0\left(t,x\right),J\left[u^0\left(t\right)\right]\right)$ является решением задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Тихонов А.Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. М.: Машиностроение, 1990. 64 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, 1972. 735 с.
4. *Сейдакмат кызы Э.* Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / Сейдакмат кызы Э. // Вестник КГУ им. И. Арабаева. Сер. физика, математика и информатика. Бишкек, 2014. С. 292–296.
5. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. М.: Наука, 1978. 500 с.
6. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.