УДК 517.968.22

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ВОЛЬТЕРРОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Сейдакмат кызы Э.

Исследованы вопросы построения приближенного решения задачи нелинейного граничного оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями, и доказана их сходимость.

Ключевые слова: краевая задача; функционал; оптимальное управление; система нелинейных интегральных уравнений; приближенное решение; сходимость.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE BOUNDARY VECTOR CONTROL PROBLEM FOR THE THERMAL PROCESSES DESCRIBED BY VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Seidakmat kyzy E.

The article investigates questions of construction of the approximate solutions of the nonlinear boundary optimal control problem for the thermal processes, described by Volterra integro-differential equations, and proves their convergence as well.

Key words: boundary value problem; the functional; the optimal control; system of nonlinear integral equations; approximate solution; convergence.

I. Постановка задачи оптимизации и ее полное решение

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[v(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T(u_1^2(t)+u_2^2(t))dt,\quad \beta>0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи [1]

$$v_t=v_{xx}+\lambda\int_0^t K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+g(t,x),\quad (t,x)\in Q, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi(x),\ \ 0<x<1, \tag{3}$$

$$v_x(t,0)=p_1\left[t,\overline{u}(t)\right],\qquad 0<t\le T, \tag{4}$$

$$v_x(t,1)+\alpha v(t,1)=p_2\left[t,\overline{u}(t)\right],\ \ 0<t\le T,$$

Здесь функция $v(t,x)$, $(t,x)\in Q=\{0<x<1,\ 0<t\le T\}$ описывает состояние управляемого процесса, ядро $K(t,\tau)$ – известная ограниченная функция, т. е.

$$K_0=\sup_{(t,\tau)\in D}\left|K(t,\tau)\right|,\quad D=\left\{0\le t\le T,\quad 0\le\tau\le T\right\}, \tag{5}$$

$\xi(x) \in H(0,1)$, $g(t,x) \in H(Q)$, $\psi(x) \in H(0,1)$ – заданные функции, $\overline{u}(t) = u_1(t)$, $u_2(t)$, $\overline{u}(t) \in H^2(0,T)$ – вектор-функция управления, функции $p_1\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right]$, $p_2\left[t,\overline{u}\left(t\right)\right] \in H\left(0,T\right)$ нелинейно зависят от вектор-функции управления и по функциональной переменной $\overline{u}(t)$ и удовлетворяют условию

$$D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0, \forall t \in \left[0,T\right], \tag{6}$$

λ – параметр; постоянная $\alpha > 0$, T – фиксированный момент времени, H (Y) – гильбертово пространство функций, определенных на множестве Y.

Решение краевой задачи определяется по формуле

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x),$$

где $v_n(t)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$v_n\left(t\right) = \lambda \int_0^t K_n\left(t,s\right) v_n\left(s\right) ds + a_n\left(t\right), \tag{7}$$

с ядром

$$K_n\left(t,s\right) = \int_s^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} K\left(\tau,s\right) d\tau, \tag{8}$$

и свободным членом

$$a_n\left(t\right) = e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n\left(\tau\right) + p_2\left[\tau,\overline{u}\left(\tau\right)\right] z_n\left(1\right) - p_1\left[\tau,\overline{u}\left(\tau\right)\right] z_n\left(0\right)\right) d\tau. \tag{9}$$

Коэффициенты Фурье $v_n(t)$ определяются по формуле [2]

$$v_n\left(t\right) = \lambda \int_0^t R_n\left(t,s,\lambda\right) a_n\left(s\right) ds + a_n\left(t\right), \tag{10}$$

где резольвента R_n (t,s,λ) ядра K_n (t,s) имеет вид

$$R_n(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t,s), \quad K_{n,i+1}\left(t,s\right) = \int_s^t K_n\left(t,\eta\right) K_{n,i}\left(\eta,s\right) d\eta, \quad i = 1,2,3,\ldots, \tag{11}$$

и удовлетворяет оценке

$$| R_n\left(t,s,\lambda\right) | \leq \frac{K_0}{\lambda_n^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 (t-s)}{\lambda_n^2}} \leq \frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}}. \tag{12}$$

Оптимальное управление u^0 (t) определяется как решение нелинейного интегрального уравнения [3]:

$$\beta D^{-1}\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)\begin{pmatrix} u_1\left(t\right) \\ u_2\left(t\right) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*\left(t,0\right) \\ G_n^*\left(t,1\right) \end{pmatrix} \int_0^T (G_n\left(\tau,0\right), G_n\left(\tau,1\right)) \begin{pmatrix} p_1\left(\tau,u_1\left(\tau\right),u_2\left(\tau\right)\right) \\ p_2\left(\tau,u_1\left(\tau\right),u_2\left(\tau\right)\right) \end{pmatrix} d\tau = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} G_n^*\left(t,0\right) \\ G_n^*\left(t,1\right) \end{pmatrix} h_n, \tag{13}$$

где

$$h_n = \xi_n - \psi_n \left(e^{-\lambda_n^2 T} + \lambda \int_0^T R_n(T,s,\lambda_n) e^{-\lambda_n^2 s} ds \right) - \int_0^T G_n(\tau) g_n(\tau) d\tau; \tag{14}$$

$$G_n(t)z_n(1) = z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right) = G_n(t,1);$$
$$G_n(t)z_n(0) = -z_n(0)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T R_n(T,s,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(s-t)}ds\right) = G_n(t,0); \tag{15}$$

$$G_n^*(t)z_n(1) = z_n(1)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right) = G_n^*(t,1),$$
$$G_n^*(t)z_n(0) = -z_n(0)\left(e^{-\lambda_n^2(T-t)} + \lambda\int_t^T L_n(s,t,\lambda_n)e^{-\lambda_n^2(T-s)}ds\right) = G_n^*(t,0), \tag{16}$$

удовлетворяющие дополнительному условию

$$\Pi_{u_1u_1}(\cdot,u_1,u_2) < 0, \qquad \left(\Pi_{u_1u_1}(\cdot,u_1,u_2)\,\Pi_{u_2u_2}(\cdot,u_1,u_2) - \left(\Pi_{u_2u_1}(\cdot,u_1,u_2)\right)^2\right) > 0. \tag{17}$$

Оптимальное управление имеет структуру [4]

$$u^0(t) = \tilde\varphi\left[t,\tilde\theta(t),\beta\right] = \begin{pmatrix}\varphi_1\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right]\\ \varphi_2\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right]\end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\tilde\theta(t)$ является единственным решением нелинейного интегрального уравнения

$$\tilde\theta(t) = \tilde G\left[\tilde\theta(t)\right] \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\int_0^T \tilde G_n^*(\tau,0,1)\,\tilde p\left(t,\tilde\varphi\left[t,\tilde\theta(t),\beta\right]\right)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde G_n(t,0,1)\,h_n. \tag{19}$$

Оптимальный процесс $v^0(t,x)$ определяется по формуле

$$v^0(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)\left(e^{-\lambda_n^2 s}\psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}\left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right)d\tau\right)ds + \right.$$
$$\left. + e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,u^0(\tau)\right]\right)d\tau\right]z_n(x), \tag{20}$$

а минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле

$$J[u^0(t)] = \int_0^1\left[v^0(T,x) - \xi(x)\right]^2 dx + \beta\int_0^T\left(u_1^2(t) + u_2^2(t)\right)dt. \tag{21}$$

Найденная тройка $\left(u^0(t), v^0(t,x), J[u^0(t)]\right)$ определяет решение задачи нелинейной оптимизации.

II. Приближенное решение задачи оптимизации

На практике не всегда удается найти точное решение уравнения (19). Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $\theta_k(t)$ уравнения (18), где число k определяется из неравенства [5]

$$\left\|\tilde\theta(t) - \tilde\theta_k(t)\right\|_{H^2} \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|\overline{G}[\tilde\theta_0(t)] + \hbar(t) - \tilde\theta_0(t)\right\|_{H^2}. \tag{22}$$

Согласно структуре оптимального управления k – е приближение находим по формуле

$$\overline{u}_k(t) = \tilde\varphi\left[t,\tilde\theta_k(t),\beta\right], \quad k = 1,2,3\ldots. \tag{23}$$

Лемма 2.1. k-е приближение оптимального управления удовлетворяет оценке

$$\left\|u^0(t) - \overline{u}_k(t)\right\|_{H^2} \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|\overline{G}[\tilde\theta_0(t)] + \hbar(t) - \tilde\theta_0(t)\right\|_{H^2}, \tag{24}$$

и сходится к оптимальному управлению $u^0(t)$ по норме пространства $H^2(0,T)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|u^0(t) - \overline{u}_k(t)\right\|_{H^2} \le \left\|\tilde\varphi\left[t,\tilde\theta(t),\beta\right] - \tilde\varphi\left[t,\tilde\theta_k(t),\beta\right]\right\|_{H^2} \le \varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|\overline{G}[\tilde\theta_0(t)] + \hbar(t) - \tilde\theta_0(t)\right\|_{H^2},$$

из которого следует утверждение леммы.

Подставляя в (20) приближенное управление $\bar{u}_k(t)$, находим k-е приближение $v_k(t,x)$ оптимального процесса $v^0(t,x)$, т. е.

$$v_k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n(t,s,\lambda)\left(e^{-\lambda_n^2 s}\psi_n+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right)d\tau\right)ds+\right.$$
$$\left.+e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right)d\tau\right]z_n(x). \tag{25}$$

Лемма 2.2. k-е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\|v^0(t,x)-v_k(t,x)\right\|_{H^2}\le 2\sqrt{T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\lambda^2T^2\left[\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right]^2\right)}\,p_0\left\|u^0(t)-\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2} \tag{26}$$

и сходится к оптимальному процессу $v^0(t,x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Согласно (24) и (25), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\|v^0(t,x)-v_k(t,x)\right\|_{H^2}^2=$$
$$=\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\left(e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}+\lambda\int_\tau^t R_n(t,s,\lambda)e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}ds\right)^2\left(z_n^2(0)+z_n^2(1)\right)d\tau\left\|\overline{p}\left[\tau,u^0(\tau)\right]-\overline{p}\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right\|_{H^2}^2dt\le$$
$$\le 4T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\left(1+\lambda^2T^2\left[\frac{K_0}{\lambda_1^2}e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right]^2\right)p_0^2\left\|u^0(t)-\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2}^2<\infty$$

из которого следует утверждение леммы.

При исследовании сходимости оптимального процесса необходимо учитывать сходимость по резольвенте, так как приближение оптимального процесса имеет вид

$$v_k^m(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^t R_n^m(t,s,\lambda)\left(e^{-\lambda_n^2 s}\psi_n+\int_0^s e^{-\lambda_n^2(s-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right)d\tau\right)ds+\right.$$
$$\left.+e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left(g_n(\tau)+z_n^*(0,1)\overline{p}\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right)d\tau\right]z_n(x) \tag{27}$$

и определяются двумя индексами $k,\ m=1,2,3,\ldots$ Поскольку

$$R_n(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\ \text{и}\ R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s),$$

то сходимость m-го приближения резольвенты $R_n(t,s,\lambda)$ при каждом фиксированном $n=1,2,3\ldots$, следует из неравенства

$$R_n(t,s,\lambda)-R_n^m(t,s,\lambda)=\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{n,i}(t,s)\le\sum_{i=m+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}\left|K_{n,i}(t,s)\right|\le\frac{K_0}{\lambda_n^2}\cdot\frac{1}{m!}\left(\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right)^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}. \tag{28}$$

Лемма 2.3. k, m-е приближение оптимального процесса удовлетворяет оценке

$$\left\|v_k(t,x)-v_k^m(t,x)\right\|_{H^2}\le$$
$$\le\sqrt{\frac{3}{2}\left[\left\|\psi(x)\right\|_H^2+T\left\|g(\tau,x)\right\|_H^2+2T\left\|p\left[\tau,\overline{u}_k(\tau)\right]\right\|_{H^2}^2\right]}\lambda T\left(\frac{K_0}{\lambda_1^2}\frac{1}{m!}\left[\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}\right]^m e^{\frac{|\lambda|K_0T}{\lambda_1^2}}\right)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<\infty$$

и сходится к процессу $v_k(t,x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Согласно (27) и (28), непосредственным вычислением имеем неравенство

$$\left\| v_k(t,x) - v_k^m(t,x) \right\|_{H^2}^2 = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda \int_0^t \left[R_n(t,s,\lambda) - R_n^m(t,s,\lambda) \right] \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1) \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right) d\tau \right) ds \right]^2 dt \le$$

$$\le 3 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\lambda_n^2} \right)^2 \left\{ \lambda^2 T \left(\frac{K_0}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{m!} \left(\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right)^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau,x)\|_H^2 + 4T \left\| \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right\|_{H^2}^2 \right] \right\} dt \le$$

$$\le \frac{3}{4} \lambda^2 T^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right)^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} \frac{1}{m!} \left[\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2} \right]^m e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau,x)\|_H^2 + 4T \left\| \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right\|_{H^2}^2 \right],$$

из которого следует утверждение леммы.

Поскольку $v_k^m(t,x)$ определяется как сумма бесконечного функционального ряда, то не всегда удается ее найти. Поэтому на практике целесообразно использовать приближение вида

$$v_k^{m,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t,s,\lambda) \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1) \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right) d\tau \right) ds + \right.$$

$$\left. + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1) \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right) d\tau \right] z_n(x),$$

которое назовем *k, m, r* -м приближением оптимального процесса.

Лемма 2.4. *k, m, r* -е приближение оптимального процесса при $r \to \infty$ сходится к функции $v_k^m(t,x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением имеем соотношение

$$\left\| v_k^m(t,x) - v_k^{m,r}(t,x) \right\|_{H^2}^2 =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=r+1}^{r} \left[\lambda \int_0^t R_n^m(t,s,\lambda) \left(e^{-\lambda_n^2 s} \psi_n + \int_0^s e^{-\lambda_n^2 (s-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1) \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right) d\tau \right) ds + \right.$$

$$\left. + e^{-\lambda_n^2 t} \psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} \left(g_n(\tau) + z_n^*(0,1) \overline{p}\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right) d\tau \right]^2 dt \le$$

$$\le 3 \left[\lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau,x)\|_H^2 + 4T \left\| \overline{p}^2\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right\|_{H^2}^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau,x)\|_H^2 + 4T \left\| \overline{p}^2\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right\|_{H^2}^2 \right] \right] \le$$

$$\le 3 \left[1 + \lambda^2 T^2 \left(\frac{K_0}{\lambda_1^2} e^{\frac{|\lambda| K_0 T}{\lambda_1^2}} \right)^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \right] \left[\|\psi(x)\|_H^2 + T \|g(\tau,x)\|_H^2 + 4T \left\| \overline{p}^2\left[\tau, \overline{u}_k(\tau)\right] \right\|_{H^2}^2 \right] < \infty,$$

которое справедливо при каждом фиксированном *k = 1, 2, 3, ...,* так как остаточный член сходящегося ряда стремится к нулю при $r \to \infty$.

Лемма 2.5. *k, m, r* -е приближение оптимального процесса при *k, m, r* $\to \infty$ сходится к функции $v^0(t,x)$ по норме пространства $H^2(Q)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left\|\nu^0(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H^2}^2 \le \left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)+\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)+\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H^2}^2 \le$$

$$\le \left\|\nu^0(t,x)-\nu_k(t,x)\right\|_{H^2}^2+\left\|\nu_k(t,x)-\nu_k^m(t,x)\right\|_{H^2}^2+\left\|\nu_k^m(t,x)-\nu_k^{m,r}(t,x)\right\|_{H^2}^2 \xrightarrow[k,m,r\to\infty]{} 0,$$

которое справедливо согласно леммам 2.1–2.4.

Поскольку оптимальный процесс имеет приближения $\nu_k(t,x)$, $\nu_k^m(t,x)$ и $\nu_k^{m,r}(t,x)$, то будем различать три вида приближенных значений функционала (1):

$$J[\overline{u}_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left(u_{1k}^2(t)+u_{2k}^2(t)\right)dt,$$

$$J_m[\overline{u}_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left(u_{1k}^2(t)+u_{2k}^2(t)\right)dt,$$

$$J_m^r[\overline{u}_k(t)]=\int_0^1\left[\nu_k^{m,r}(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left(u_{1k}^2(t)+u_{2k}^2(t)\right)dt.$$

Лемма 2.6. k-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left|J[u^0]-J[\overline{u}_k]\right|\le C_1\left\|\nu^0(T,x)-\nu_k(T,x)\right\|_{H^2}+C_2\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\varphi_0(\beta)\left\|\overline{G}[\tilde{\theta}_0(t)]+\hbar(t)-\tilde{\theta}_0(t)\right\|_{H^2}, \tag{29}$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные и сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left|J[u^0]-J[\overline{u}_k]\right|\le\int_0^1\left\{\left[\nu^0(T,x)-\xi(x)\right]^2-\left[\nu_k(T,x)-\xi(x)\right]^2\right\}dx+$$

$$+\beta\int_0^T\left\{u_1^2(t)-u_{1k}^2(t)+u_2^2(t)-u_{2k}^2(t)\right\}dt\le$$

$$\le\left\|\nu^0(T,x)+\nu_k(T,x)-2\xi(x)\right\|_{H^2}\left\|\nu^0(T,x)-\nu_k(T,x)\right\|_{H^2}+$$

$$+\beta\left\|u^0(t)+\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2}\left\|u^0(t)-\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2}\le$$

$$\le C_1\left\|\nu^0(T,x)-\nu_k(T,x)\right\|_{H^2}+C_2\left\|u^0(t)-\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2},$$

которое справедливо согласно леммам 2.1–2.2.

Лемма 2.7. m-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left|J[\overline{u}_k]-J_m[\overline{u}_k]\right|\le C_3\left\|\nu_k(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_H, \tag{30}$$

где C_3 – положительные постоянные и сходится к значению функционала $J[\overline{u}_k(t)]$..

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left|J[u_k]-J_m[u_k]\right|\le\int_0^1\left\{\left[\nu_k(T,x)-\xi(x)\right]^2-\left[\nu_k^m(T,x)-\xi(x)\right]^2\right\}dx\le$$

$$\le\left\|\nu_k(T,x)+\nu_k^m(T,x)-2\xi(x)\right\|_H\left\|\nu_k(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_H\le C_3\left\|\nu_k(T,x)-\nu_k^m(T,x)\right\|_H,$$

которое справедливо согласно лемме 2.3.

Лемма 2.8. r-е приближенное значение функционала удовлетворяет оценке

$$\left|J_m[u_k]-J_m^r[u_k]\right|\le C_4\left\|\nu_k^m(T,x)-\nu_k^{m,r}(T,x)\right\|_H, \tag{31}$$

где C_4 – положительное постоянное и сходится к значению функционала $J_m[u_k]$..

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \le \int_0^1 \left\{ \left[v_k^m(T,x) - \xi(x) \right]^2 - \left[v_k^{m,r}(T,x) - \xi(x) \right]^2 \right\} dx \le$$

$$\le \left\| v_k^m(T,x) + v_k^{m,r}(T,x) - 2\xi(x) \right\|_H \left\| v_k^m(T,x) - v_k^{m,r}(T,x) \right\|_H \le C_4 \left\| v_k^m(T,x) - v_k^{m,r}(T,x) \right\|_H ,$$

которое справедливо согласно леммы 2.4.

Лемма 2.9. *k, m, r* – е приближенное значение функционала при *k, m, r* → ∞ сходится к точному значению функционала $J[u^0]$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из соотношения

$$\left| J[u^0] - J_m^r[u_k] \right| \le \left| J[u^0] - J[u_k] + J[u_k] - J_m[u_k] + J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \le$$

$$\le \left| J[u^0] - J[u_k] \right| + \left| J[u_k] - J_m[u_k] \right| + \left| J_m[u_k] - J_m^r[u_k] \right| \xrightarrow[k,m,r\to\infty]{} 0,$$

которое справедливо согласно леммам 2.6–2.8.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц / В.С. Владимиров // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
2. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. М.: Наука, 1975. 303 с.
3. *Сейдакмат кызы Э.* Вывод системы нелинейных интегральных уравнений в задаче граничного векторного управления тепловыми процессами, описываемыми вольтеррово интегро-дифференциальными уравнениями / Сейдакмат кызы Э. // Вестник КГУ им. И. Арабаева. Сер. физика, математика и информатика. Бишкек, 2014. С. 292–296.
4. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков; Ин-т математики НАН КР. Бишкек, 2003. 224 с.
5. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. М.: Наука, 1965. 520 с.