

УДК 539.3

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ЛОКАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Ш. Мамаев

Численно исследовано напряженное состояние цилиндрической оболочки с одним закрепленным концом при импульсном локальном нагружении. На основе анализа численных результатов предсказываются возможные места разрушения.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка; цилиндрические координаты; метод бихарактеристик; нормальное окружное напряжение; осевое напряжение.

Одним из важных функциональных назначений наружных корпусов технических сооружений является удержание возникающих при критических условиях механических воздействий внутренних элементов конструкции. Такие события, как правило, происходят при нарушении по какой-либо причине штатных условий эксплуатации узлов и элементов сооружения. Такие нерасчетные режимы приводят к внезапному динамическому воздействию на корпус. Поэтому расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при локальном поперечном ударе кроме научного интереса, имеет прямую техническую направленность.

Изучению явлений распространения и взаимодействия волн нагружения в цилиндрических телах круглого сечения в трехмерной постановке посвящено небольшое число работ. В [1] рассмотрены волны напряжений, возникающие в полом упругом цилиндре при локальном нагружении симметрично относительно торцов. В [2] методом “пространственный крест” рассмотрено численное решение двух пространственных нестационарных задач: взаимодействия сферической полосы с цилиндрической полостью; локальное импульсное нагружение на части внешней поверхности полого упругопластического цилиндра. Дан обзор численного моделирования нестационарных задач.

В настоящей работе методом бихарактеристик [3–5] в трехмерной постановке получено численное решение задачи импульсного локального нагружения цилиндрической оболочки с одним закрепленным концом.

**Определяющая система уравнений.** Будем использовать следующее безразмерные величины:

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{l}, \quad t = \frac{t \cdot c_1}{l}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}}{\rho \cdot c_1^2}, \quad V_i = \frac{\bar{V}_i}{c_1}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (1)$$

где с чертой обозначены соответствующие размерные величины,  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \varphi$ ,  $x_3 = z$  – цилиндрические координаты;  $t$  – время;  $l$  – характерная длина;  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе;  $\rho$  – плотность среды;  $c_1$  – скорость распространения продольной волны.  $V_1 = V_r$ ,  $V_2 = V_\varphi$ ,  $V_3 = V_z$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{12} = \sigma_{r\varphi}$ ,  $\sigma_{23} = \sigma_{\varphi z}$ ,  $\sigma_{31} = \sigma_{zr}$  – компоненты вектора скорости смещений и тензора напряжений. Исходная система уравнений, описывающая процесс распространения динамических возмущений в упругой изотропной среде в цилиндрических координатах, в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 - \sigma_{11,1} - \frac{1}{r} \sigma_{12,2} - \sigma_{13,3} &= \frac{1}{r} (\sigma_{11} - \sigma_{22}), \\ \dot{V}_2 - \sigma_{21,1} - \frac{1}{r} \sigma_{22,2} - \sigma_{23,3} &= \frac{2}{r} \sigma_{21}, \\ \dot{V}_3 - \sigma_{31,1} - \frac{1}{r} \sigma_{32,2} - \sigma_{33,3} &= \frac{1}{r} \sigma_{31}, \\ \dot{\sigma}_{11} - c_{11}^2 V_{1,1} - \frac{1}{r} c_{12}^2 V_{2,2} - c_{13}^2 V_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{12}^2 V_1, \\ \dot{\sigma}_{22} - c_{21}^2 V_{1,1} - \frac{1}{r} c_{22}^2 V_{2,2} - c_{23}^2 V_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{22}^2 V_1, \\ \dot{\sigma}_{33} - c_{31}^2 V_{1,1} - \frac{1}{r} c_{32}^2 V_{2,2} - c_{33}^2 V_{3,3} &= \frac{1}{r} c_{32}^2 V_1, \\ \dot{\sigma}_{12} - S_{12}^2 \left( \frac{1}{r} V_{1,2} + V_{2,1} \right) &= -\frac{1}{r} S_{12}^2 V_2, \\ \dot{\sigma}_{23} - S_{23}^2 \left( V_{2,3} + \frac{1}{r} V_{3,2} \right) &= 0, \\ \dot{\sigma}_{31} - S_{31}^2 \left( V_{1,3} + V_{3,1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $c_{ij} = \begin{cases} \lambda + 2\mu, \dots \text{при } i = j, \\ \lambda, \dots \text{при } i \neq j, \end{cases}$   $S_{ij} = \mu$ . Точка над переменной и запятая перед индексом

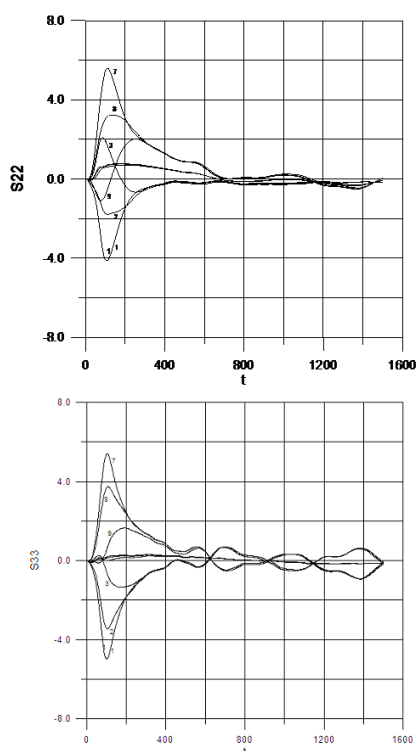


Рисунок 1 – Осциллограммы нормального окружного  $s_{22}$  (1) и осевого  $s_{33}$  (2) напряжения для точек 1(0, 0, 40h), 2(0,2h,40h), 3(0,4h,40h), 4(h,0,40h), 5(h,2h,40h), 6(h,4h,40h), 7(2h,0,40h), 8(2h,2h,40h), 9(2h,4h,40h)

означают соответственно дифференцирование по времени и пространственной переменной.

Для решения системы уравнений (2) применяется метод бихарактеристик, основанный на сочетании идей метода характеристик и расщепления [3–5].

**Постановка задачи.** Рассматривается цилиндрическая оболочка толщиной  $H$ , внутренним радиусом  $R_0$ , длиной  $L$ . Цилиндрическая оболочка в начальный момент времени находится в состоянии покоя

$$V_i = 0; s_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

В любой другой момент времени  $t$  на малый участок  $\Omega = \{x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^1, x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^1\}$  внутренней поверхности оболочки (граница  $x_1 = R_0$ ) действует нестационарная нормальная к поверхности оболочки нагрузка  $f(x_2, x_3; t)$ , изменяющаяся во времени и по координатам.

$$\sigma_{11} = \begin{cases} f(x_2, x_3; t) & \text{при } t \leq T, \\ 0 & \text{при } t > T, \end{cases} \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad (4)$$

где  $T$  – время действия нагрузки.

Предполагается, что грань  $x_3 = L$  жестко закреплена и на ней выполняются условия

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad (5)$$

а грань  $x_3 = 0$  свободна от нагрузок, т. е.

$$\sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{23} = 0 \quad \text{при } x_3 = 0. \quad (6)$$

Кроме того, вся наружная поверхность оболочки свободна от действия каких-либо нагрузок, т. е.

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{при } x_1 = R_0 + H. \quad (7)$$

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (2) при нулевых начальных (3) и граничных (4)–(7) условиях.

#### Анализ результатов численных расчетов.

В расчетах рассматривалась цилиндрическая оболочка конечных размеров:  $H = 2h_1$ ,  $R_0 = 100h_1$ ,  $L = 100h_3$ . Отношение радиуса к толщине составляет 50, и рассматриваемая оболочка относится к семейству тонкостенных оболочек. Несмотря на особенности размеров оболочки, она исследуется в трехмерной постановке. При численной реализации задачи выбиралась следующая форма динамического нагружения:

$$f(x_2, x_3; t) = A [1 - \cos(\pi t / T)] (x_2^0 - x_2) (x_3^1 - x_3) \cos(\eta x_2), \quad (8)$$

в которой  $A = 0.5$  – постоянный коэффициент;  $T = 80\tau$ ,  $x_2^0 = -4h_2$ ,  $x_2^1 = 4h_2$ ,  $x_3^0 = 30h_3$ ,  $x_3^1 = 50h_3$ ,  $\eta = 15$ . Задачу решали на сетке  $3 \times 121 \times 101$ . Шаги сетки по времени  $\tau = 0.005$  и пространственным координатам  $h_1 = h_3 = h = 2\tau$ ;  $h_2 = \frac{\pi}{120} = 0.02618$  выбирали согласно условию устойчивости. Минимальное значение внешней нагрузки  $f(0, 40h_3; 40\tau) = -1$ .

Принятая форма нагружения (8) является симметричной относительно плоскости  $x_2 = 0$  и решение определяется для углов  $0 \leq x_2 \leq \pi$ , а при  $x_2 = 0$ ,  $\pi$  ставится условие симметрии  $V_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{23} = 0$ ,  $V_{1,2} = \sigma_{11,2} = \sigma_{22,2} = 0$ . Материал цилиндра имеет следующие характеристики:  $E = 202 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7.951 \times 10^{-10} \text{ кгс}^2/\text{мм}^4$ . Общий анализ результатов вычислений показывает, что в рамках решенной задачи (выбранных размеров оболочки, места расположения и размера площадки динамического воздействия, его интенсивности и скорости приложения) наибольшие напряжения реализуются в области, непосредственно прилегающей к месту действия нагрузки, в течение времени, которое практически совпадает с продолжительностью её воздействия. На рисунках 1, 2 приведены осциллограммы нормальных окружных  $\sigma_{22}$  (рисунок 1) и осевых  $\sigma_{33}$  (рисунок 2) напряжений в девяти точках 1(0,0,40h), 2(0,2h,40h), 3(0,4h,40h), 4(h,0,40h), 5(h,2h,40h), 6(h,4h,40h), 7(2h,0,40h), 8(2h,2h,40h), 9(2h,2h,40h) сечения  $x_3 = 40h$ , соответствующее наибольшему значению внешней нагрузки. С течением времени  $t$  после окончания времени воздействия внешней нагрузки, уровень напряжений сильно уменьшается. Поэтому с точки зрения возможности разрушения оболочки может представить интерес уровень напряжений в моменты времени  $t$ , близкие к времени действия

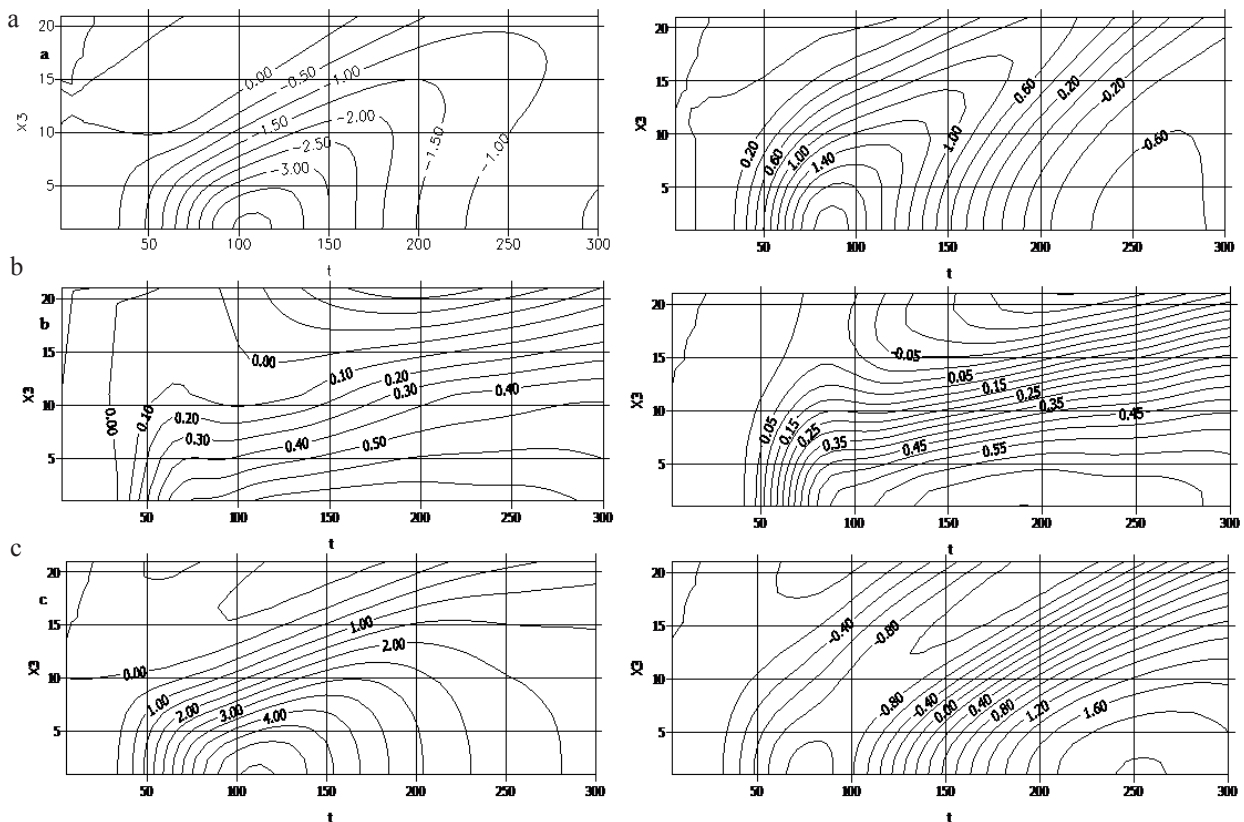


Рисунок 2 – Изменение во времени  $t$  и осевом направлении  $x_3$  окружного напряжения  $\sigma_{22}(x_3, t)$  во внутренней, срединной, наружной поверхностях в двух меридиональных сечениях  $x_2=0, 4h$

внешней нагрузки. Так, например, в период времени нагружения  $0 \leq t \leq 600\tau$  на внутренней поверхности  $x_1=R_0$  реализуется напряжения сжатия, за исключением точек  $3(0, 4h_2, 40h)$  внутренней поверхности, в которой в начальный период времени происходят растяжения. Наибольшая величина напряжения, которая превосходит в 2,1 раза минимума внешней нагрузки по абсолютной величине, может способствовать развитию разрушения с внутренней стороны. А на наружной поверхности  $x_1=R_0+H$  оболочки реализуются напряжения растяжения. При этом окружная  $\sigma_{22}$  и осевая  $\sigma_{33}$  компоненты напряжений достаточно большие (кривая 7), которые превосходят минимум внешней нагрузки в 5,6–5,4 раза в моменты времени 104–110 $\tau$ . В более отдаленные моменты времени  $t$  распределение напряжений по толщине оболочки становится однородным.

На рисунке 2 представлены изменения во времени  $t$  и в осевом направлении  $x_3(40h_3 \leq x_3 \leq 60h_3)$  окружных напряжений  $\sigma_{22}(x_3, t)$  в трех поверхностях  $x_1 = 0$  (внутренняя, а)  $x_1 = h$  (срединная, б) и  $x_1 = 2h$  (наружная, в) по толщине оболочки на двух ее меридиональных сечениях  $x_2 = 0$  (слева)

и  $x_2 = 4h_2$  (справа) (сечения  $x_2 = 4h_2$  соответствуют границе приложенной нагрузки). Можно видеть, что на внутренней поверхности оболочки по оси  $x_2 = 0$  действия нагрузки вслед за окончанием ее воздействия (в момент времени  $120\tau \leq t \leq 160\tau$ ) реализуются сжимающие окружные напряжения, превышающее минимальное значение внешней нагрузки. Несколько ранее (в моменты времени  $80\tau \leq t \leq 100\tau$ ) на границе действия нагрузки ( $x_2=4h_2$ ) реализуются напряжения растяжения, медленно уменьшающиеся от широты  $x_2=4h_2$  центрального сечения поверхности нагружения к сечению  $x_3=40$ . Несмотря на то, что уровни растягивающих напряжений несколько меньше (в два раза в рассматриваемом случае) абсолютной величины рассмотренных выше сжимающих окружных напряжений, можно заключить, что именно растягивающие нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  могут быть причиной разрыва нагруженной области оболочки. В точках срединной поверхности  $x_1=h$  (см. рисунок 2, б) уровни окружных напряжений  $\sigma_{22}$  заметно ниже, чем на внутренней поверхности. Примечательно, что окружные напряжения всюду на срединной поверхности являются растягивающими.

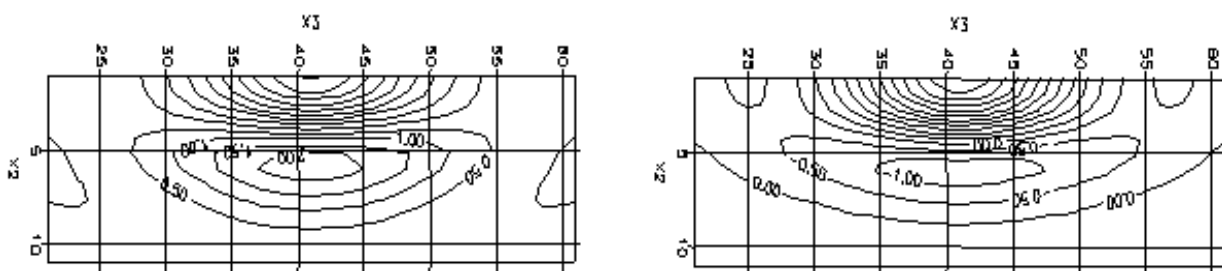


Рисунок 3 – Изолинии нормального окружного напряжения  $\sigma_{22}(x_2, x_3)$  на внутренней (слева) и наружной (справа) поверхностях оболочки в момент времени  $t = 100\tau$

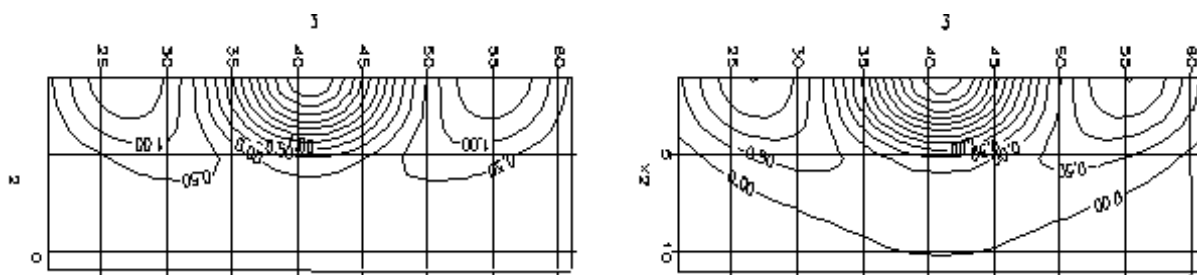


Рисунок 4 – Изолинии нормального осевого напряжения  $\sigma_{33}(x_2, x_3)$  на внутренней (слева) и наружной (справа) поверхностях оболочки в момент времени  $t = 100\tau$

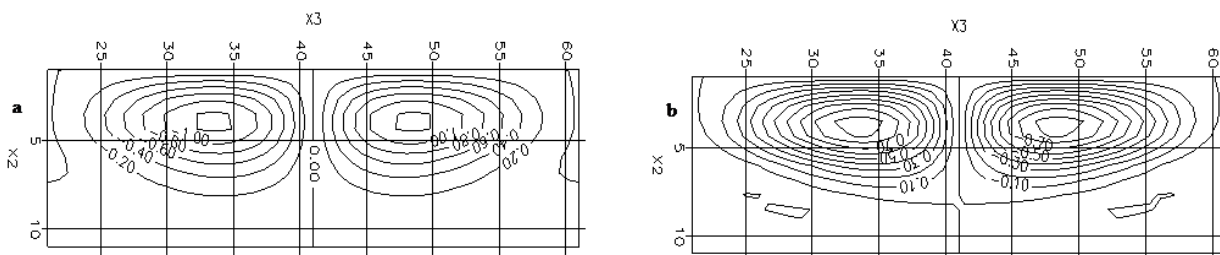


Рисунок 5 – Изолинии сдвигового напряжения  $\sigma_{23}(x_2, x_3)$  на внутренней (слева) и наружной (справа) поверхностях оболочки в момент времени  $t = 100\tau$

Поэтому небольшой фон напряжений может только способствовать развитию области разрывов. На наружной поверхности  $x_1=2h$  оболочки (см. рисунок 2 с) в исследуемых сечениях  $x_2=0$  и  $x_2=4h_2$  нормальные окружные напряжения  $\sigma_{22}$  являются напряжениями растяжения. При этом по оси ( $x_2=0$ ) действия нагрузки максимальных величин окружных напряжений  $\sigma_{22}$  реализуются практически сразу (моменты времени  $101\tau \leq t \leq 116\tau$ ) после окончания внешней нагрузки. Величины нормальных окружных напряжений  $\sigma_{22}$  большие и они, как правило, являются причиной местных разрывов в центре действия внешней нагрузки. По мере удаления от оси действия нагрузки окружные напряжения  $\sigma_{22}$  быстро уменьшаются и в меридиональном сечении ( $x_2=4h_2$ ) максимальные их значения составляют уже меньше

половины того, что было на оси  $x_2=0$ . При этом они появляются в несколько поздние моменты времени (в момент времени  $240 \leq t \leq 270\tau$ ). Тем не менее, и в этом сечении  $x_2=4h_2$  величины окружности напряжений  $\sigma_{22}$  достаточны для того, чтобы поддержать в этом сечении начатое с внутренней поверхности разрушение.

Ниже приведены изолинии нормальных напряжений  $\sigma_{22}(x_2, x_3)$  (рисунок 3) и  $\sigma_{33}(x_2, x_3)$  (рисунок 4) на внутренней  $x_1=0$  (слева), и наружной  $x_1=2h$  (справа) поверхностях оболочки в момент времени  $t=100\tau$ , когда они достигают экстремальных значений. На наружной поверхности  $x_1=2h$  в области действия нагрузки нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  являются растягивающими, а в непосредственной близости от нее становятся сжимающими. Таким образом, сразу вслед за действием

ударной нагрузки в области ее действия возможны разрывы от нормальных напряжений  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  на наружной поверхности оболочки. Такой характер разрушения корпусов имеет многочисленные экспериментальные подтверждения. На внутренней поверхности  $x_1 = 0$  картина распределения напряжений является обратной: в области действия нагрузки нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$  являются сжимающими, а непосредственно за пределом области действия нагрузки реализуются растягивающие нормальные напряжения  $\sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$ . Несмотря на то, что по абсолютной величине максимальные значения растягивающих напряжений раза в два меньше сжимающих, тем не менее их величины достаточно высоки, чтобы быть причиной разрывов материала оболочки по окаймляющей области действия нагрузки линии.

На рисунке 5 приведены изолинии сдвиговых напряжений  $\sigma_{23}(x_2, x_3)$  при  $x_1 = 0$  (слева),  $x_1 = 2h$  (справа) в момент времени  $t = 100\tau$ . На рисунке видно, что экстремальные значения достигаются на внутренних и внешних поверхностях оболочки в окрестности угловых точек прямоугольника, ограничивающего область действия нагрузки, т. е. касательные напряжения  $\sigma_{23}$  инициируются дифрагированными от угловых точек волнами сдвига.

Таким образом, разрушения оболочки в первую очередь могут иметь место на наружной ее поверхности в точке экстремума действующей нагрузки, и в последующем эти разрушения локализуются по границе области приложения внешней

нагрузки. Так как внешняя нагрузка была сглажена по координатам и времени, то указанные разрушения в основном обусловлены нормальными напряжениями. Касательные напряжения  $\sigma_{23}$  могут способствовать развитию разрушения.

### Литература

1. *Бабич Ю.Н.* Напряженное состояние полого цилиндра при импульсивном локальном нагружении / Ю.Н. Бабич, З.Г. Алпаидзе, Ш.У. Галиев // Проблемы прочности. 1987. № 10. С. 89–94.
2. *Зеленский А.С.* Численное решение пространственных динамических задач для оси симметричных упругопластических тел / А.С. Зеленский, В.Н. Кукуджанов // Препринт № 384. Ин-т проблем механики АН СССР. М., 1989. 40 с.
3. *Тарабин Г.Т.* Численное решение нестационарных задач динамики анизотропной упругой среды / Г.Т. Тарабин // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 83–95.
4. *Мамаев Ш.* Продольный удар по полюсу цилиндру конечной длины / Ш. Мамаев // Наука и образование Южного Казахстана. 2000. № 12 (19). С. 71–77.
5. *Каримбаев Т.Д.* Применение метода бихарактеристик к исследованию локального импульсного нагружения цилиндрической оболочки / Т.Д. Каримбаев, Ш. Мамаев // Механика и моделирование процессов технологии. 2005. № 1. С. 150–161.