УДК 539.215; 539.374

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Б.А. Рычков, Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская

Рассматриваются прочностные свойства горных пород по результатам испытания при трехосном сжатии по схеме Кармана цилиндрических образцов. Пределы прочности при произвольном напряженном состоянии определены с помощью критерия Мора и на основе экспериментальных данных только одноосного сжатия.

Ключевые слова: горные породы; пластичность; предел прочности; круги Мора.

Для подробного изучения механических свойств горных пород испытания проводят на специальных лабораторных установках, наиболее известными из них являются установки типа Т. Кармана, когда между осевым напряжением сжатия σ_2 и главными напряжениями σ_2 и σ_3 от равномерного бокового давления выполняется соотношение $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$, вид напряженного состояния характеризуется параметром $c = \sigma_3/\sigma_1$. В данной статье рассматривается такой случай трехосного сжатия и в качестве критерия прочности используется критерий Мора.

Касательное τ_ν и нормальное σ_ν напряжения, следуя Мору [1], на площадке первоначальных локальных скольжений представим следующим соотношением

$$\tau_\nu = S_0 - \mu\sigma_\nu, \tag{1}$$

где S_0 и μ – параметры материала; ν – нормаль к рассматриваемой площадке.

В плоскости, повернутой относительно площадки действия максимального касательного напряжения на угол β эти напряжения $\tau_\nu = \tau_{\nu(\beta)} = \tau_\beta$, $\sigma_\nu = \sigma_{\nu(\beta)} = \sigma_\beta$ определяются по формулам

$$\sigma_\beta = \sigma_0 + T\sin 2\beta,\ \tau_\beta = T\cos 2\beta, \tag{2}$$

где σ_0 – среднее напряжение, T – максимальное касательное напряжение, т. е.

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3),\ T = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \tag{3}$$

Правая часть равенства (1) называется сопротивлением сдвигу. Оно согласно (2) и (3) выражается следующим образом:

$$S_\beta = S_0 - \mu(\sigma_0 + T\sin 2\beta). \qquad (4)$$

При первом скольжении касательные к кривым $S_\beta = S_\beta(\beta)$ и $\tau_\beta = \tau_\beta(\beta)$ совпадут, т. е. касательное напряжение $\tau_\beta(\beta)$ достигает значения сопротивления сдвигу в направлении этого скольжения:

$$\frac{dS_\beta}{d\beta} = \frac{d\tau_\beta}{d\beta} \text{ при } \beta = \beta_0, \qquad (5)$$

где β_0 – угол, определяющий направление первого скольжения, отсчитываемый от направления действия максимального касательного напряжения T.

Из (5), учитывая (1)–(4), вытекает, что

$$\mu = tg 2\beta_0. \qquad (6)$$

Таким образом, величина угла β_0 определяется параметром μ, величину которого будем считать зависящей от вида напряженного состояния.

Считается, что срез при разрушении образца происходит в площадках, повернутых на угол β_0, на которых интенсивность скольжений с ростом уровня напряжений наибольшая.

Согласно опытным данным [2], начиная с напряженного состояния $c = 1/3$ и выше, угол $\beta_0 = 0$, т. е. при данном напряженном состоянии срез происходит по плоскости максимального касательного напряжения (T) и горные породы деформируются как пластичный материал. Тогда, при $c = 1/3$ из соотношений (2) и (3) вытекает, что

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = 2. \qquad (7)$$

При c, отличных от 1/3, это отношение равно

$$\frac{\sigma_{\beta_0}}{\tau_{\beta_0}} = \frac{(1+c)+(1-c)\sin 2\beta_0}{(1-c)\cos 2\beta_0} = k(c). \qquad (8)$$

Предположим, что отношение (8) линейно изменяется от значения $k_0 = k(0)$ до $k(1/3) = 2$. Рассматривая геометрическое построение круга Мора на сжатие, величину k_0 определим по формуле

$$k_0 = \frac{1+\cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0}, \qquad (9)$$

где угол $\alpha_0 = 45^0 - \beta_0$ определяется экспериментально.

В плоскости среза соотношение между нормальным и касательным напряжениями все время изменяется с изменением вида напряженного состояния. Принимая это, введем для коэффициента k интерполяционную формулу:

$$k = k(c) = \frac{1}{1/3}[ck_n + (\frac{1}{3} - c)k_0],$$

где k_n равно значению, получаемому для предельного напряженного состояния ($c = 1/3$), при котором еще справедлив критерий Кулона–Мора.

Угол среза β_0 при произвольном c определим из соотношения (8), учитывая формулы (2) и (3):

$$\sin 2\beta_0 = \frac{-(1+c)+k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2-(1+c)^2}}{(1-c)(1+k^2)}. \qquad (10)$$

Согласно (2),(3) и (8), условие (1) можно представить в следующем виде:

$$\sigma_1^s = \sigma_1^s(c) = \frac{2S_0}{(1-c)(\cos 2\beta_0 + k\cdot\sin 2\beta_0)}, \qquad (11)$$

где σ_1^s – предел прочности при произвольном напряженном состоянии для $c \le 1/3$.

Величина S_0 определяется из сопоставления с экспериментальными данными. Подобно аналогичному методу [2] выражения пределов прочности (в зависимости от вида напряженного состояния), параметр S_0 представляется в следующем виде:

$$S_0 = S_0^0 \exp(\xi c + \eta c^2), \qquad (12)$$

где ξ и η в общем случае определяются [3] по экспериментальным данным для пределов прочности при каких-либо двух видах напряженного состояния.

При $c = 0$ параметр S_0 должен быть равен пределу прочности на одноосное сжатие σ_c. Согласно этому условию и, учитывая (11) и (12), получим:

$$S_0^0 = \frac{1}{2}\sigma_c(\cos 2\beta_0^0 + k_0 \sin 2\beta_0^0)\ (\beta_0^0 = \beta_0|_{c=0}, k_0 = k|_{c=0}).$$

Входящие в выражение для S_0 параметры ξ и η можно определить в первом приближении, используя только эксперимент на одноосное сжатие. Для этого вначале надо рассмотреть построение огибающей к кругам Мора.

Уравнение кругов Мора можно представить [3] в виде

$$\varphi(\sigma,\tau,c) = \sigma^2 + \tau^2 - (1+c)\sigma_1\sigma + c\sigma_1^2 = 0, \qquad (13)$$

где в качестве параметра данного семейства кругов фигурирует c.

Согласно известной теореме [4], огибающая семейства вида (13) должна также удовлетворять уравнению

$$\varphi_c(\sigma,\tau,c) = 0 \ (\varphi_c = \partial\varphi/\partial c) \qquad (14)$$

или

$$\varphi_c(\sigma,\tau,c) = -(\sigma_1)_c(1+c)\sigma - \sigma_1\sigma + \sigma_1^2 + 2\sigma_1 c(\sigma_1)_c = 0. \qquad (15)$$

Из системы уравнений (11) и (15) определяется совокупность точек (σ, τ) данной огибающей:

$$\sigma = \frac{\sigma_1^s[\sigma_1^s + 2c(\sigma_1^s)_c]}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c},$$

$$\tau = \frac{(1-c)\sigma_1^s}{\sigma_1^s + (1+c)(\sigma_1^s)_c}\sqrt{[\sigma_1^s + c(\sigma_1^s)_c](\sigma_1^s)_c} \qquad (16)$$

Используя (11), найдем

$$(\sigma_1^s)_c = \sigma_1^s R(c), \qquad (17)$$

где

$$R(c) = \xi + 2c\eta + \frac{1}{1-c} - \frac{(k - tg 2\beta_0)(\sin 2\beta_0)_c + k_c \sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 + k\sin 2\beta_0}. \qquad (18)$$

Сопоставляя выражения (16) и (17), получим:

$$\frac{\sigma}{\tau}=\frac{1+2cR}{(1-c)\sqrt{(1+cR)R}}. \quad (19)$$

В случае одноосного сжатия ($c = 0$) из (19) имеем

$$R_0 = R(0)=1/(\sigma^0/\tau^0)^2, \quad (20)$$

где

$$\sigma^0/\tau^0=(\sigma/\tau)\big|_{c=0}. \quad (21)$$

Из (17), учитывая (11) и (18), при $c = 0$ получим выражение для параметра ξ:

$$\xi = R+\frac{(\sin 2\beta_0)_c(k-tg2\beta_0)+k_c\sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0+k\sin 2\beta_0}]$$

$$((\sin 2\beta_0)_c=\frac{\partial}{\partial c}\sin 2\beta_0;\ k_c=\frac{\partial}{\partial c}k(c)).$$

Второе условие (для определения параметра η) получим, используя свойства огибающей к кругам Мора.

Координаты точки касания огибающей круга на одноосное сжатие σ^0, τ^0 определяются по следующим двум методам.

1. При известном экспериментальном значении угла среза α_0 и пределе прочности на сжатие σ_c, с помощью тригонометрических соотношений из круга Мора при одноосном сжатии определяются σ^0, τ^0, что дает

$$\sigma^0/\tau^0=\frac{1-\cos 2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0}. \quad (22)$$

2. Выразим отношение σ^0, τ^0 как функцию от истинной пористости (Р) ряда горных пород [5]:

$$\sigma^0,\ \tau^0=f(P).$$

Предварительно отношение σ^0, τ^0 для каждой конкретной породы определяется по методу, изложенному в [6]:

$$\sigma^0/\tau^0=\sqrt{\frac{2\sigma_c/\sigma_p}{1+(\sigma_c/\sigma_p)^2}},$$

где σ_p – предел прочности при растяжении.

При известных данных пористости (P) горных пород можно получить графическую зависимость $\sigma^0/\tau^0 - f(P)$, при аппроксимации которой получаем аналитическое выражение вида

$$\sigma^0/\tau^0=a+b\ln P,$$

где a и b имеют определенные значения для конкретных горных пород.

Определив тем или иным способом величину σ^0/τ^0, условие для параметра η, входящего в формулу (12), получим следующим образом.

Максимальное касательное напряжение при переходе за указанное выше предельное состояние c_n (т. е. при $c > c_n$) остается постоянным. Иначе говоря,

$$\frac{\partial}{\partial c}\tau_{\max}\bigg|_{c>c_n}=0. \quad (23)$$

Из этого равенства вытекает:

$$(\sigma_1^s)_c=\sigma_1^s\frac{1}{1-c}\ (c\ge c_n). \quad (24)$$

Для большинства горных пород, как известно $c_n = 1/3$. При этом и угол β_0 с ростом c не изменяется, т. е.

$$(\sin 2\beta_0)_c\big|_{c\ge 1/3}=0. \quad (25)$$

Таким образом, из условия (24), с учетом (17) и (18), при $c = 1/3$ получаем выражение для параметра η:

$$\eta=-\frac{3}{2}\xi.$$

Условие (7) (при $c = 1/3$) представляет, по существу, отношение среднего напряжения σ_0 к максимальному касательному напряжению, т. е. как было указано ранее, при $c = 1/3$), угол $\beta_0 = 0$. Учитывая (2) и (3), при $c = 1/3$ получим:

$$\sigma_0/\tau_{\beta_0}=2\ (c\in[0,1/3]). \quad (26)$$

При c, отличных от 1/3, это отношение равно

$$\frac{\sigma_0}{\tau_{\beta_0}}=\frac{(1+c)}{(1-c)\cos 2\beta_0}=k(c). \quad (27)$$

Из условия (7) при одноосном сжатии ($c = 0$) угол среза $\alpha_0 = 26{,}6^0$, а при $c \to 1/3$ угол $\alpha_0 = 45^0$, что хорошо соответствует экспериментальным данным для большинства представленных в [2] пород. Однако для выбросоопасного, неопасного по выбросам песчаников и кварцевого диорита Д-2 при $c = 1$ угол среза $\alpha_0\big|_{c=0}\approx 20^0$, поэтому для этих материалов целесообразнее использовать условие (27), согласно которому при одноосном сжатии угол среза $\alpha_0\big|_{c=0}\approx 15^0$. Таким образом, условие (26) расширяет (по сравнению с условием (7)) диапазон изменения угла среза с изменением вида напряженного состояния.

Выражение для пределов прочности, согласно соотношению (26) и, учитывая вышеизложенную процедуру представления пределов прочности при отношении (7), представляется в следующем виде:

$$\sigma_1^s=\sigma_1^s(c)=\frac{2S_0\cos 2\beta_0}{(1-c)(1+k\sin 2\beta_0\cos 2\beta_0)}.$$

Выражения для некоторых других параметров также меняют свой вид, что учитывается при расчетах.

Графики зависимостей расчетных (сплошная линия) и полученных А.Н. Ставрогиным экспериментально (штриховая линия) значений пределов прочности приведены для некоторых горных пород в виде предельных кругов Мора и огибающих к этим кругам на рисунке 1. Причем на рисунке 1а и б, представленные результаты вычислены согласно условию (7), на рисунке 1 в и г – согласно (26).

Примечание: координаты огибающих, полученные А.Н. Ставрогиным, построены согласно

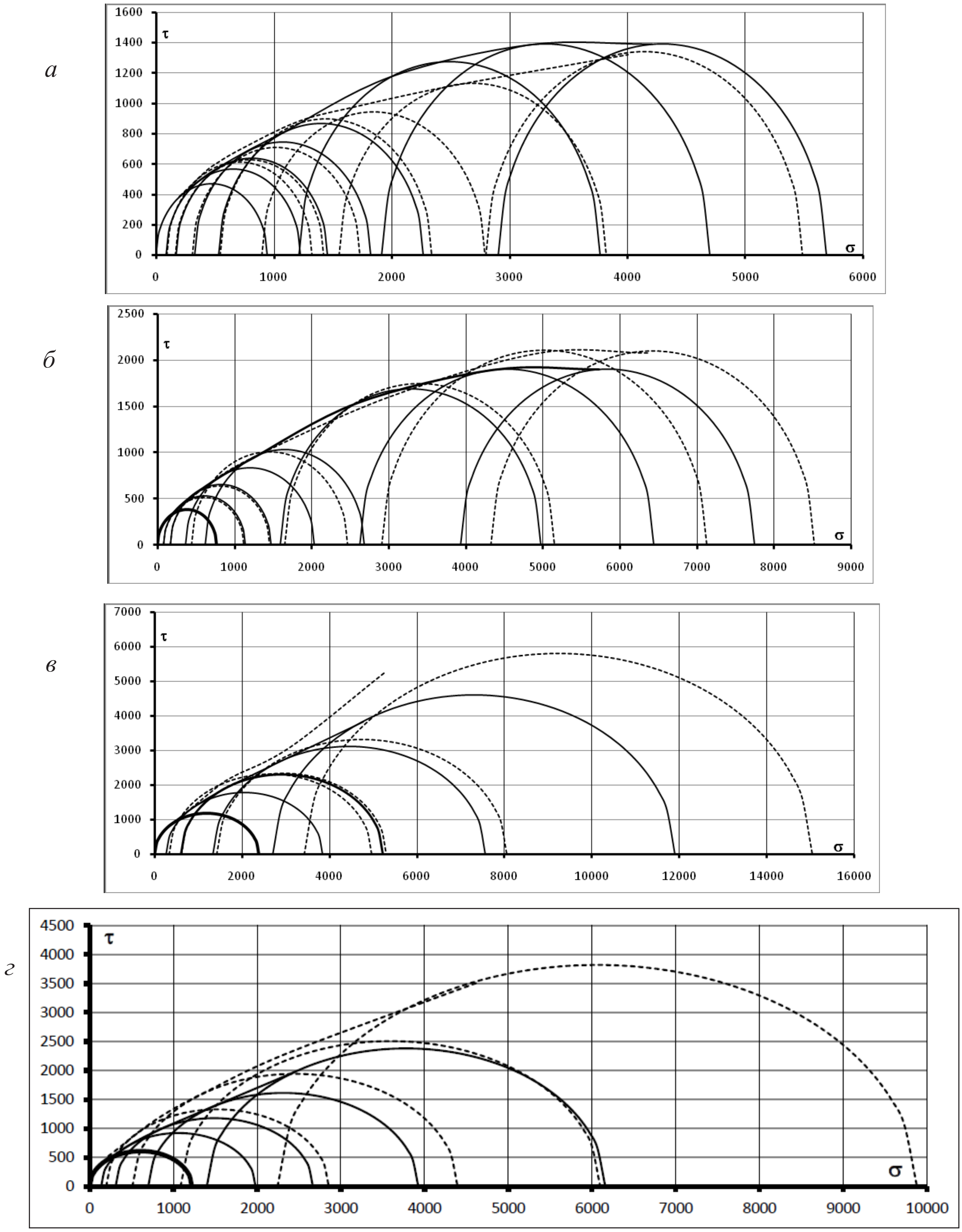

Рисунок 1 – Предельные круги Мора и огибающие к ним для:
а – талькохлорита; б – мрамора-II; в – кварцевого диорита Д-2; г – выбросоопасного песчаника

приложению № 5 [2]. Каким образом вычислены эти координаты в монографии [2] не указано. Возможно, в данном приложении имеются некоторые ошибки (опечатки), что наглядно проявилось в изображении соответствующей огибающей для кварцевого диорита Д-2.

Литература

1. *Мор О.* Чем обусловлены предел упругости и временное сопротивление материалов / О. Мор // Новые идеи в технике. СПб.: Образование, 1915. 75 с.
2. *Ставрогин А.Н.* Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. М.: Недра, 1979.
3. *Рычков Б.А.* Дилатансия геоматериалов с учетом разупрочнения / Б.А. Рычков, Е.И. Кондратьева, Ж.Ы. Маматов // Вестник Самарского гос. ун-та. 2004. Спец. вып.
4. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. М.: Наука, 1974.
5. *Рычков Б.А.* О пределах упругости и прочности горных пород / Б.А. Рычков // Тез. докл. II Всерос. конф. “Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций”. Новосибирск, 10–14 окт. 2011 г. Новосибирск, 2011.
6. О теоретическом и экспериментальном построении огибающей предельных кругов Мора / В.М. Жигалкин и др. // ФТПРПИ. 2010. № 6. С. 25–36.