УДК 517.97 (575.2) (04)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЕКТОРНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

Л.С. Красниченко

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи нелинейной оптимизации в случае двухстороннего управления процессом распространения тепла по стержню.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация; оптимальное управление; тепловой процесс; граничное условие.

I. Слабо обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса

Рассмотрим управляемый тепловой процесс описываемый функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в области Q =(0,1)x(0,T) уравнению теплопроводности [1]

$$V_t = V_{xx} + f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

а на границе области Q начальному условию

$$V(0,x) = \psi(x), \quad x \in (0,1) \tag{2}$$

и граничным условиям

$$V_x(t,0) = p_1[t,\bar{u}(t)], \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

где $f(t,x) \in H(Q)$ – заданная функция; $\bar{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$, $\bar{u}(t) \in H^2(0,T)$ – вектор-функция управления; $p_1[t,\bar{u}(t)]$, $p_2[t,\bar{u}(t)] \in H(0,T)$ функции, нелинейно зависящие от вектор-функции управления, которые описывают изменения теплового источника на границе; $\psi(x) \in H(0,1)$ $\forall t \in [0,T]$ – функция начального состояния управляемого процесса; постоянная α>0; T – фиксированный момент времени; H – пространство Гильберта; $H^2 = H \times H$ – декартово произведение пространств H.

Определение 1.1. Слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется любая функция $V(t,x) \in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (V(t,x)\Phi(t,x))_{t_1}^{t_2} dx =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V(t,x)(\Phi(t,x) + \Phi(t,x)) + f(t,x)\Phi(t,x)\right] dxdt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} -\left(\Phi_x(t,1) + \alpha\Phi(t,1)\right)V(t,1) +$$

$$+\Phi_x(t,0)V(t,0))dt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} (p_2[t,\bar{u}(t)]\Phi(t,1) -$$

$$-p_1[t,\bar{u}(t)]\Phi(t,0))dt,$$

при произвольных моментах времени t_1 и t_2 $(0 \le t_1 \le t \le t_2 \le T)$ и для любой функции $\Phi(t,x) \in C^{1,2}[Q]$, а также начальному условию (2) в слабом смысле, т. е. соотношение

$$\lim_{t \to +0} \int_0^1 [V(t,x) - \psi(x)]\Phi_0(x)dx = 0$$

выполняется для любой функции $\Phi_0(x) \in H(0,1)$, где $C^{1,2}[Q]$, – пространство Гильберта функций, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по переменной t и 2-го порядка по переменной *x*.

Используя методику работы [2] нетрудно показать, что функция

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\left[-z_n(0)p_1[\tau,\bar{u}(\tau)] + \right.\right. \tag{4}$$

$$\left.\left. + z_n(1)p_2[\tau,\bar{u}(\tau)] + f_n(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x),$$

где ψ_n, $f_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi(x)$ и *f(x,t)* является слабо обобщенным решением краевой задачи (1)–(3). Заметим, что единственность решения краевой задачи (1)–(3) обеспечивается лишь при выполнении условия

$$D\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_1}{\partial u_2}\\ \dfrac{\partial p_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_2}{\partial u_2}\end{vmatrix}\neq 0,\quad \forall t\in[0,T],\quad (5)$$

т. е. при этом каждое управление $\bar{u}(t)$ определяет единственное слабо обобщенное решение краевой задачи (1)–(3).

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности

Вектор-функция управления $\bar{u}(t)\in H^2(0,T)$, для которой краевая задача (1)–(3) имеет единственное слабо обобщенное решение $V(t,x)\in H(Q)$, называется допустимым управлением.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации: среди допустимых управлений $\bar{u}(t)\in H^2(0,T)$, требуется найти такое управление $\tilde{u}(t)\in H^2(0,T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $V(t,x)\in H(Q)$ краевой задачи (1)–(3) минимизирует квадратичный интегральный функционал

$$I[u(t)]=\int_0^1[V(T,x)-\xi(x)]^2dx+$$

$$+\beta\int_0^T(u_1^2(t)+u_2^2(t))dt,\quad \beta>0,$$

где $\xi(x)\in H(0,1)$ заданная функция.

Согласно методике работы [3] нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\Delta I[\bar{u}]=$$

$$=-\int_0^T\Delta\Pi\left[t,V(t,x),\omega(t,x),u_1(t),u_2(t)\right]dt+$$

$$+\int_0^1\Delta V^2(T,x)dx,$$

где $\Delta V(T,x)$ – приращение функции $V(T,x)$, соответствующее приращению $\Delta\bar{u}(t)$ управления $\bar{u}(t)$; $\Delta\Pi[t,\omega(t,x),\bar{u}(t)]$ – приращение функции

$$\Pi(\bullet,u_1(t),u_2(t))=$$

$$=-\omega(t,0)p_1(t,u_1(t),u_2(t))+$$

$$+\omega(t,1)p_2(t,u_1(t),u_2(t))-\beta(u_1^2+u_2^2).$$

Согласно принципу максимума [3], для оптимального управления получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\Pi_{u_1}(\bullet,u_1,u_2)=-\omega(t,0)\frac{\partial p_1}{\partial u_1}+\omega(t,1)\frac{\partial p_2}{\partial u_1}-2\beta u_1=0,\\ &\Pi_{u_2}(\bullet,u_1,u_2)=-\omega(t,0)\frac{\partial p_1}{\partial u_2}+\omega(t,1)\frac{\partial p_2}{\partial u_2}-2\beta u_2=0\end{aligned}\quad (7)$$

или в матричной форме:

$$2\beta\begin{pmatrix}u_1^0(t)\\ u_2^0(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial p_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial p_2}{\partial u_1}\\ \dfrac{\partial p_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial p_2}{\partial u_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\omega(t,0)\\ \omega(t,1)\end{pmatrix},\quad (7')$$

и $\Pi_{u_1u_1}(\bullet,u_1,u_2)<0$, $\begin{vmatrix}\Pi_{u_1u_1}(\bullet,u_1,u_2) & \Pi_{u_1u_2}(\bullet,u_1,u_2)\\ \Pi_{u_2u_1}(\bullet,u_1,u_2) & \Pi_{u_2u_2}(\bullet,u_1,u_2)\end{vmatrix}>0,$ (8)

которые называются условиями оптимальности.

Здесь $\Pi_{u_iu_j}(\bullet,u_1,u_2)$ – частные производные 2-го порядка, $\omega(t,1)$ – решение сопряженной краевой задачи.

$$\omega_t+\omega_{xx}=0,(t,x)\in Q,$$

$$\omega(T,x)+2\left[V(T,x)-\xi(x)\right]=0,x\in(0,1),$$

$$\omega_x(t,0)=0,\omega_x(t,1)+\alpha\,\omega(t,1)=0,0<t<T.\quad (9)$$

Соотношение (7') согласно условию (5) представим в виде

$$2\beta D^{-1}\left(\frac{p_1,p_2}{u_1,u_2}\right)=2\beta D^{-1}\left(\frac{P(t,\bar{u})}{\bar{u}}\right)=\begin{pmatrix}-\omega(t,0)\\ \omega(t,1)\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-h_n+\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}\times\\ &\times\left[-z_n(0)P_1(t,u_1(t),u_2(t))+\right.\\ &\left.+z_n(1)P_2(t,u_1(t),u_2(t))\right]d\tau)e^{-\lambda_n^2(T-t)}z_n(x).\end{aligned}\quad (10)$$

Легко доказать, что сопряженная краевая задача имеет единственное слабо обобщенное решение:

$$\begin{aligned}&\omega(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}(-h_n+\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-t)}\times\\ &\times\left[-z_n(0)P_1(t,u_1(t),u_2(t))+\right.\\ &\left.+z_n(1)P_2(t,u_1(t),u_2(t))\right]d\tau)e^{-\lambda_n^2(T-t)}z_n(x),\end{aligned}\quad (11)$$

где

$$h_n=\xi_n-e^{-\lambda_n^2T}\psi_n-\int_0^T e^{-\lambda_n^2(T-\tau)}f_n(\tau)d\,\tau.$$

III. Система нелинейных интегральных уравнений

Оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ находим согласно условиям (7)–(8).

Согласно условию (5) и формулам (10)–(11), уравнение (7) перепишем в виде

$$\beta D^{-1}\begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ u_1, u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T \begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1) \end{pmatrix}(G_n(\tau,0), G_n(\tau,1)\times$$
$$\times\begin{pmatrix} P_1(t,u_1(t),u_2(t)) \\ P_2(t,u_1(t),u_2(t)) \end{pmatrix}d\tau =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1) \end{pmatrix}h_n, \tag{12}$$

где $G_n(t,0)=e^{(-\lambda_n^2(T-t))}z_n(0), G_n(t,1)=e^{(-\lambda_n^2(T-t))}z_n(1)$. Для исследования однозначной разрешимости уравнения (12) сначала его перепишем в виде

$$\beta D^{-1}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{u}}\right)\tilde{u}(t)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,0,1)\int_0^T \tilde{G}_n^*(\tau,0,1)\tilde{p}(t,\tilde{u}(t))d\tau=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,0,1)h_n, \tag{13}$$
$$\tilde{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},\ \tilde{G}_n(t,0,1)=\begin{pmatrix} G_n(t,0) \\ G_n(t,1) \end{pmatrix}$$

где $$\tilde{p}(t,\tilde{u}(t))=\begin{pmatrix} p_1(t,u_1(t),u_2(t)) \\ p_2(t,u_1(t),u_2(t)) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Согласно методике работы [4] положим

$$\beta D^{-1}\left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{u}}\right)\tilde{u}(t)=\begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}=\tilde{\Theta}(t); \tag{15}$$

согласно условию (5), это равенство однозначно разрешается относительно вектор-функции $\tilde{u}(t)$, т. е. имеет место равенство

$$\tilde{u}(t)=\tilde{\varphi}\left[t,\tilde{\Theta}(t),\ \beta\right]=$$
$$=\begin{pmatrix} \varphi_1\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right] \\ \varphi_2\left[t,\theta_1(t),\theta_2(t),\beta\right] \end{pmatrix}. \tag{16}$$

С учетом (15)–(16) уравнение (13) преобразуем к виду

$$\tilde{\theta}(t)=G\left[\tilde{\theta}(t)\right], \tag{17}$$

где

$$G\left[\tilde{\theta}(t)\right]=-G_0\left[\tilde{\theta}(t)\right]+\hbar(t)=$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,0,1)\int_0^T\tilde{G}_n^*(\tau,0,1)\tilde{p}\times$$
$$\times\left(t,\tilde{\varphi}\left[t,\tilde{\theta}(t),\ \beta\right]\right)d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{G}_n(t,0,1)h_n.$$

Теорема: Пусть выполнены условия:

$\bar{p}\left[t,\bar{u}(t)\right]\in H^2(0,T),\ \forall\bar{u}(t)\in H^2(0,T),$

$D\left(\frac{P(t,\bar{u})}{\bar{u}}\right)\neq 0,\quad \forall t\in[0,T].$

$\left\|p\left[t,u(t)\right]-p\left[t,\bar{u}(t)\right]\right\|_{H^2}\leq$

$\leq p_0\left\|\tilde{u}(t)-\bar{u}(t)\right\|_{H^2},\ p_0>0,$

$\left\|\varphi[t,\ \theta(t),\beta]-\varphi[t,\bar{\theta}(t),\beta]\right\|_{H^2}\leq$

$\leq\varphi_0(\beta)\left\|\tilde{\theta}(t)-\bar{\theta}(t)\right\|_{H^2},\ \varphi_0(\beta)>0.$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=M_1p_0\varphi_0(\beta)\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)<1,\quad M_1>0 \tag{18}$$

операторное уравнение (17) имеет единственное решение $\bar{\theta}(t)\in H^2(0,T)$.

IV. Приближенное решение задачи оптимизации

Поскольку найти точное решение уравнения (17) не всегда удается, на практике ограничиваются нахождением приближенного решения, которое определяется с учетом заданной точности.

Приближенное решение строится по формулам
$\tilde{\theta}_k(t)=G\left[\tilde{\theta}_{k-1}(t)\right]=G_0\left[\tilde{\theta}_{k-1}(t)\right]+\hbar(t)$, k=1,2,3…,

где $\tilde{\theta}_0(t)$ – произвольная вектор-функция пространства $H^2(0,T)$ и удовлетворяет оценке:

$$\left\|\tilde{\theta}(t)-\tilde{\theta}_k(t)\right\|_{H^2}\leq\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\tilde{\theta}_0(t)\right]+\hbar(t)-\tilde{\theta}_0(t)\right\|_{H^2}.$$

Приближение оптимального управления, согласно (16), определяется по формуле

$\bar{u}_k(t)=\tilde{\varphi}[t,\ \tilde{\theta}_k(t),\ \beta]$, k=1, 2, 3…

и удовлетворяет оценке

$$\left\|\bar{u}(t)-\bar{u}_k(t)\right\|_{H^2}=$$
$$=\left\|\varphi\left[t,\tilde{\theta}(t),\ \beta\right]-\varphi\left[t,\tilde{\theta}_k(t),\beta\right]\right\|_{H^2}\leq$$
$$\leq\varphi_0(\beta)\left\|\tilde{\theta}(t)-\tilde{\theta}_k(t)\right\|_H\leq$$
$$\leq\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\tilde{\theta}_0(t)\right]+\hbar(t)-\tilde{\theta}_0(t)\right\|_{H^2}.$$

из которой следует сходимость приближенного оптимального управления к оптимальному.

Приближенный оптимальный процесс, согласно (4), определяется по формуле

$$V_k(t,x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}(f_n(\tau)+z_n^*(1)\tilde{p}[\tau,\overline{u}_k(\tau)])$$
$$d\tau\,]z_n(x)$$

и удовлетворяет оценке

$$\|V(t,x)-V_k(t,x)\|_{H^2}^2\le$$
$$\le\left[TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]^{1/2}p_0\phi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\tilde{\theta}_0(t)\right]+\hbar(t)-\tilde{\theta}_0(t)\right\|_{H^2},$$

из которого следует сходимость приближенного оптимального процесса к оптимальному.

Приближенное значение функционала, согласно (6), вычисляется по формуле

$$I\left[\overline{u}_k(t)\right]=$$
$$=\int_0^1\left[V_k(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T\left\|\overline{u}_k(t)\right\|^2dt$$

и удовлетворяет оценке

$$\left|I\left[\overline{u}(t)\right]-I\left[\overline{u}_k(t)\right]\right|\le$$
$$\le\left\{\left(\|V(t,x)+V_k(t,x)\|_{H^2}+2\|\xi(x)\|_{H^2}\right)\times\right.$$
$$\times\left[2TM_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\right]^{1/2}P_0+\beta\left\|\overline{u}(t)+\overline{u}_k(t)\right\|_{H^2}\Big\}\times$$
$$\times\phi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G_0\left[\tilde{\theta}_0(t)+\hbar(t)-\tilde{\theta}_0(t)\right]\right\|_{H^2},$$

из которого следует сходимость приближенного значения функционала к точному .

Литература

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. … д-ра физ.-мат. наук. Бишкек: Ин-т математики НАН КР, 2003. 224 с.