УДК 517.977.5 (575.2) (04)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОДВИЖНОМ ТОЧЕЧНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.К. Керимбеков, К.Р. Карабакиров

Исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи оптимального управления упругими колебаниями струны в случае, когда точка приложения внешнего воздействия, нелинейно зависящая от функции управления, меняется по заданному закону, т.е. является подвижной.

Ключевые слова: оптимальное управление; упругие колебания; функция управления; нелинейная оптимизация.

I. Обобщенное решение краевой задачи управляемого процесса. Рассмотрим упругие колебания струны конечной длины, описываемые функцией $V(t, x)$, которая в области $Q = (0, 1) \times (0, T)$ удовлетворяет уравнению [1]

$$V_{tt} = V_{xx} + \delta\left[x - x_0(t)\right] f\left[t, u(t)\right], \qquad (t,\, x) \in Q, \qquad (1)$$

а на границе области Q – начальным условиям

$$V(0, x) = \psi_1(x),\ V_t(0, x) = \psi_2(x),\ 0<x<1, \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$V_x(t, 0) = 0, V_x(t, 1) + \alpha V(t, 1) = 0,\ 0<t \le T, \qquad (3)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака; x_0точка приложения функции внешнего воздействия $f\left[t, u(t)\right] \in H(0,\ T)$, является функцией от времени $t\in[0, T]$ и удовлетворяет ограничению

$$0\le x_0(t) \le 1; \qquad (4)$$

функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$ и удовлетворяет условию монотонности, т.е.

$$\frac{\partial f\left[t,u\right]}{\partial u} \equiv f_u\left[t,u(t)\right] \ne 0,\ \forall t \in [0,T]; \qquad (5)$$

$\psi_1(x)\in H(0, 1)$, $\psi_2(x)\in H(0, 1)$ – функции начального состояния струны; H – пространство Гильберта; постоянная $\alpha>0$; T – фиксированный момент времени.

Определение 1. Обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) называется любая функция $V(t,x)\in H(Q)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (V_t\Phi)_{t_1}^{t_2} dx =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V_t\Phi_t - V_x\Phi_x + \delta\left(x - x_0(t)\right) f\left[u(t)\right]\Phi\right] dxdt - \qquad (6)$$

$$-\alpha \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t,1) V(t,1)\, dt$$

для любых моментов времени t_1 и t_2 ($0 \le t_1 < t < t_2 \le T$), и для любой функции $\Phi(t,x) \in C^{1,1}[Q]$ и начальным условиям (2) в слабом смысле, т.е. соотношения

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 [V(t,x) - \psi_1(x)]\Phi_0(x)\,dx = 0,$$

$$\lim_{t\to+0}\int_0^1 [V_t(t,x) - \psi_2(x)]\Phi_1(x)\,dx = 0,$$

выполняются для любых функций $\Phi_0(x)\in H(0, 1)$, $\Phi_1(x)\in H(0, 1)$.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \qquad (8)$$

где $V_n(t) = \int_0^1 V(t,x) z_n(x)\,dx = \langle V(t,x), z_n(x)\rangle$ – коэффициенты Фурье; функция $z_n(x) = \sqrt{\frac{2(\lambda_n^2+\lambda^2)}{\lambda_n^2+\lambda^2+\lambda}} cos \lambda_n x$, $n=1,2,3,\ldots$ – решение краевой задачи

$$z''(x) + \lambda^2 z(x) = 0, \quad z(0) = 0,$$

$$z'(1) + \alpha\, z(1) = 0$$

и система функций $\{z_n(x)\}$ является ортонормированной в пространстве $H(0, 1)$; λ_n – корни трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_n < \lambda_{n+1} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty,$$

$$(n-1)\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Согласно методике работы [2], полагая в тождестве (6) $\Phi(t, x)\equiv z_n(x)$ относительно коэффициента Фурье $V_n(t)$ получим задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 \langle V,\, z_n \rangle}{\partial t^2} + \lambda_n^2 \langle V,\, z_n \rangle = z_n \left[x_0(t) \right] f\left[t,\, u(t) \right],$$

$$\langle V,\, z_n \rangle_{t=t_1} = \langle V(t_1,\, x),\, z_n(x) \rangle,\ \langle V_t,\, z_n \rangle_{t=t_1} =$$

$$= \langle V_t(t_1,\, x),\, z_n(x) \rangle, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{9}$$

Решение задачи Коши (9) находим по формуле:

$$\langle V(t,\, x),\, z_n(x) \rangle = \langle V(t_1,\, x),\, z_n(x) \rangle cos\lambda_n(t-t_1) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\langle V_t(t_1,x), z_n(x) \rangle sin\lambda_n(t-t_1) +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_{t_1}^{t_2} sin\lambda_n(t-\tau) z_n\left[x_0(\tau)\right] f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau.$$

Отсюда при $t_1 \to 0$, учитывая соотношения (7), коэффициенты Фурье $V_n(t)$ находим по формуле

$$V_n(t) = \psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n t +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau, u(\tau)\right] d\tau,$$

$$n = 1,2,3,\ldots \tag{10}$$

где ψ_{1n}, ψ_{2n} – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$.

Согласно (8) формальное решение краевой задачи (1) – (3) имеет вид:

$$V(t,\, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \psi_{2n} sin\lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t sin\lambda_n(t-\tau) z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau,\, u(\tau)\right] d\tau \right] z_n(x). \tag{11}$$

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\int_0^T\int_0^1 V^2(t,x)\,dxdt = \int_0^T\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) \right)^2$$

$$dxdt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) \le$$

$$\le 3T\left[\|\psi_1(x)\|_H^2 + \frac{1}{\lambda_1^2}\|\psi_2(x)\|_H^2 + 2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)\|f[t, u(t)\|_H^2 \right] < \infty \tag{12}$$

где символом $\|\cdot\|_H$ обозначена норма элемента гильбертова пространства H, т.е. $V(t, x) \in H(Q)$.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\int_0^T\int_0^1 V_x^2(t,x)\,dxdt < \infty.$$

II. Задача нелинейной оптимизации и условия оптимальности. Управление $u(t) \in H(0, T)$, для которого краевая задача (1) – (3) имеет единственное обобщенное решение назовем допустимым.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется минимизировать интегральный квадратичный функционал

$$J[u] = \int_0^1 [V(T,\, x) - \xi(x)]^2 dx +$$

$$+\beta\int_0^T u^2(t)\,dt, \quad \beta > 0, \tag{13}$$

на множестве допустимых управлений H(0, T), где $\xi(x) \in H(0, 1)$ – заданная функция.

Управление $u^0(t) \in H(0, T)$, на котором функционал (13) достигает минимального значения, называется оптимальным, а соответствующее ему решение краевой задачи (1) – (3) $V^0(t, x)$ – оптимальным процессом.

Пусть $u^0(t)$ – оптимальное управление. Тогда имеет место неравенство

$$\Delta J[u^0(t)] = J[u^0(t) + \Delta u(t)] - J[u^0(t)] \ge 0,$$

где $u^0(t) + \Delta u(t) \in H(0,T)$ при любом приращении $\Delta u(t) \in H(0, T)$. Согласно методике работы [3], нетрудно показать, что при соответствующем выборе функции $\omega(t, x)$ имеет место соотношение

$$\Delta J\left[u^0(t)\right] = -\int_0^T \Delta\Pi[t, \omega(t,\, x),$$

$$V(t,\, x), u^0(t)]dt, + \int_0^1 V_t^2(T\ \ x)\,dx,$$

где $\Delta V(t, x)$ – приращение функции $V(t, x)$, соответствующее приращению $\Delta u(t)$управления $u(t)$;

$\Pi[t, \omega(t, x), V(t, x), u(t)] = f[t, u(t)]\ \omega[t, x_0(t)] - \beta u^2(t)$

и $\Delta\Pi[\cdot, u(t)] = \Pi[\cdot, u(t) + \Delta u(t)] - \Pi[\cdot, u(t)]$.

Функция $\omega(t, x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$\omega_{tt} = \omega_{xx}$, $(t, x) \in Q$,

$\omega(T, x) = 0$, $0<x<1$,

$\omega_t(T, x) + 2[V(T, x) - \xi(x)] = 0$, $0<x<1$

$\omega_x(t, 0) = 0$, $\omega_x(t, 1) + \alpha\omega(t, 1) = 0$

и является единственным обобщенным решением, имеющим вид:

$$\omega(t,\, x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \left[h_n - \int_0^T G_n(t) f\left[\tau,\, u(\tau)\right] d\tau \right] z_n(x), \tag{14}$$

где $G_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} z_n[\mu_k(t)] sin\lambda_n(T-t)$,

$h_n = \xi_n - \psi_{1n} cos\lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} sin\lambda_n T$.

На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами [3] легко установить, что оптимальное управление должно удовлетворять следующим соотношениям:

$$2\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=\omega\left[t,x_0(t)\right], \qquad (15)$$

$$f_u\left[t,u(t)\right]\left(u(t)f_u^{-1}[t,u(t)]\right)_u>0, \qquad (16)$$

которые называются условиями оптимальности.

III. Нелинейное интегральное уравнение оптимального управления. Согласно (12) и (14) равенство (15) перепишем в виде

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n, \qquad (17)$$

которое представляет собой нелинейное интегральное уравнение относительно оптимального управления $u^0(t)$. Сучетом (16) мы получаем новую задачу, т.е. задачу, где требуется найти решение нелинейного интегрального уравнения (17), удовлетворяющее дополнительному условию в виде дифференциального неравенства (16).

Предположим, что эта задача имеет решение. Чтобы найти это решение, согласно методике работы [4] преобразуем уравнение (17). Положим:

$$\beta u(t)f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=p(t). \qquad (18)$$

В силу условия (16), это равенство однозначно разрешается относительно $u(t)$, т.е. существует единственная функция $\varphi(\cdot)$ такая, что

$$u(t)=\varphi[t,p(t),\beta]. \qquad (19)$$

Сучетом (18) и (19) уравнение (17) перепишем в виде

$$p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)[h_n-$$

$$-\int_0^T G_n(\tau)f\left(\tau,\varphi\left[\tau,p(\tau),\beta\right]\right)d\tau\equiv G[p]. \qquad (20)$$

Лемма 1. Оператор $G[\cdot]$ отображает пространство H в себя.

Лемма 2. Пусть функции $f[t,u(t)]$ и $\varphi[t,p(t),\beta]$ удовлетворяют условию Липшица по функциональной переменной, т.е.

$$\left\|f\left[t,u(t)\right]-f[t,\bar{u}(t)]\right\|_H\le f_0\left\|u(t)-\bar{u}(t)\right\|_H, \qquad (21)$$

$$\left\|\varphi[t,p(t),\beta]-\varphi[t,\bar{p}(t),\beta]\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\left\|p(t)-\bar{p}(t)\right\|_H \qquad (22)$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)f_0\varphi_0(\beta)<1 \qquad (23)$$

оператор $G[\cdot]$ является сжимающим.

Доказательства лемм проводятся непосредственной проверкой и не составляют труда.

Теорема 1. При выполнении условий (5), (21) – (23) операторное уравнение (20) в пространстве H(0, T) имеет единственное решение.

Доказательство следует из лемм 1–2 и из известной теоремы [5] о принципе сжимающих отображений.

Решение операторного уравнения (20) может быть найдено методом последовательных приближений

$p_n(t)=G[p_{n-1}(t)]$, $n=1,2,3,\dots$,

причем, имеет место оценка

$$\left\|p^0(t)-p_n(t)\right\|_H\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H, \qquad (24)$$

где $p_0(t)\in H(0,T)$ – произвольный элемент.

Далее, подставляя найденное $p^0(t)=\lim_{n\to\infty}p_n(t)$ в (19), находим оптимальное управление

$$u^0(t)=\varphi[t,p^0(t),\beta]. \qquad (25)$$

Подставляя оптимальное управление $u^0(t)$ в (11), находим оптимальный процесс

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}sin\lambda_n t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)z_n[x_0(\tau)]f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x)$$

и вычислим минимальное значение функционала

$$J\left[u^0\right]=\int_0^1[V^0(T,x)-\xi(x)]^2dx+\beta\int_0^T\left[u^0(t)\right]^2dt. \qquad (27)$$

Таким образом, найденная тройка ($u^0(t)$, $V^0(t,x)$, $J[u^0]$) определяет решение нелинейной задачи оптимизации.

IV. Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации. На практике построить точное решение интегрального уравнения (20) не всегда удается. Поэтому в большинстве случаев ограничиваются нахождением приближенного решения $p_k(t)$, удовлетворяющего оценке (24). Подставляя найденное $p_k(t)$, в (25), находим k-е приближение оптимального управления

$$u_k(t)=\varphi[t,p_k(t),\beta],$$

которое удовлетворяет оценке:

$$\left\|u^0(t)-u_k(t)\right\|_H\le\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H \qquad (28)$$

По найденному $u_k(t)$, согласно формуле (11), находим k-е приближение оптимального процесса

$$V_k(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}cos\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}sin\lambda_n+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n(t-\tau)z_n[x_0(\tau)]f\left[\tau,u_k(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x),$$

которое удовлетворяет оценке:

$$\left\|V^0(t,x)-V_k(t,x)\right\|_H\le T\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$f_0\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H \qquad (29)$$

После определения $u_k(t)$ и $V_k(t, x)$, согласно формуле (13), вычислим k-е приближение минимального значения функционала

$$J\left[u_k\right]=\int_0^1\left[V_k(T, x)-\xi(x)\right]^2 dx+\beta\int_0^T u_k^2(t)\,dt, \quad \beta>0,$$

которое удовлетворяет оценке

$$\left|J\left[u^0\right]-J\left[u_k\right]\right|\leq\left[c_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+\frac{1}{6}\right)+\beta c_2\right]$$

$$\varphi_0(\beta)\frac{\gamma^k}{1-\gamma}\left\|G\left[p_0(t)\right]-p_0(t)\right\|_H, \qquad (30)$$

где c_1 и c_2 положительные постоянные.

Как следует из оценок (28)–(30) приближенное решение $\left(u_k(t), V_k(t,x), J\left[u_k\right]\right)$ задачи нелинейной оптимизации сходится при $k\to\infty$ к точному решению $\left(u^0(t), V^0(t, x), J[u^0]\right)$.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т.32. № 4. С.743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2003. 21 с.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.