

УДК. 531.3 (575.2) (04)

**АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ
ПО ДВУМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМ КРАЯМ**

В.Э. Еремьянц – докт. техн. наук, профессор,

Л.Т. Панова – канд. техн. наук, доцент,

А.А. Асанова – студент

Найдены собственные частоты и формы колебаний пластины, защемленной по двум противоположным краям и свободной по двум другим краям. На примере расчета квадратной пластины проведен анализ ее собственных частот и форм, выполнена оценка влияния граничных условий на колебания различных точек пластины.

Создание машин для виброударной очистки поверхностей требует обоснования выбора их рациональных параметров. В большинстве случаев очищаемые поверхности представляют собой пластины или пологие оболочки, которые в первом приближении можно рассматривать как пластины. Поэтому для обоснования рациональных параметров машин необходимо знать поведение пластин при виброударном нагружении. Это может быть сделано путем разложения колебаний пластин по собственным формам и частотам. В связи с этим возникает задача определения собственных форм и частот колебаний пластин при различных граничных условиях на их краях.

При очистке поверхностей наиболее часто встречаются случаи, когда два противоположных края пластины жестко защемлены. При этом два других края могут быть либо защемлены, либо свободно оперты, либо свободны. Случай, когда все края пластины жестко защемлены, подробно рассмотрен в работе [1]. Частотные уравнения для прямоугольных пластин с другими граничными условиями приведены в работах [2–4]. Однако анализа частотных уравнений, а, тем более, амплитудных функций в указанных работах не приводится.

Задачей данной работы является проведение такого анализа для наименее исследованного случая, когда два противоположных края пластины защемлены, а два других – свободны.

Рассматривалась прямоугольная пластина постоянной толщины δ с размерами в плане a и b . Начало осей координат расположено в центре пластины. Оси x и y лежат в срединной плоскости пластины, а ось z перпендикулярна поверхности пластины.

Известно [1], что уравнение движения такой пластины имеет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \xi + \frac{m_0}{D} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0,$$

где ∇^2 – бигармонический оператор Лапласа; ξ – прогиб пластины; t – время; m_0 – масса пластины, отнесенная к единице площади поверхности; D – цилиндрическая жесткость пластины;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad m_0 = \rho \delta, \quad D = \frac{E \delta^3}{12(1 - \mu^2)},$$

E , ρ , μ – соответственно модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона для материала пластины.

Решение уравнения движения отыскивалось в виде:

$$\xi = w(x, y) \cos \omega t, \tag{1}$$

где $w(x, y)$ – амплитудная функция, удовлетворяющая граничным условиям на краях пластины; ω – собственная частота колебаний.

Для нахождения амплитудной функции использовался асимптотический метод [1, 2], в соответствии с которым она представлялась в виде суммы трех функций:

$$w(x, y) = C_0 \cos \gamma_1 x \cdot \cos \gamma_2 y + C_1 e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} \pm x\right)} \cos \gamma_2 y + C_2 e^{-\alpha_2 \left(\frac{b}{2} \pm y\right)} \cos \gamma_1 x. \quad (2)$$

Первый член этой суммы описывает изменение амплитуды колебаний вдали от границ пластины, первый и второй члены учитывают граничные условия на краях пластины с координатами $x = \pm a/2$, а первый и третий член учитывают граничные условия на краях пластины с координатами $y = \pm b/2$. При этом второй и третий члены представляют собой экспоненциальные функции, быстро затухающие по мере удаления от краев пластины. Знак плюс перед аргументами x, y соответствует отрицательным значениям координат, а знак минус – положительным значениям. В этом выражении C_i ($i = 0, 1, 2$) – постоянные интегрирования, γ_1, γ_2 – величины обратные длинам полуволн различных форм колебаний:

$$\gamma_1 = \pi / \Lambda_x, \quad \gamma_2 = \pi / \Lambda_y,$$

где Λ_x, Λ_y – длины полуволн вдоль осей x и y .

Остальные коэффициенты, входящие в выражение (2), находятся из соотношений:

$$\alpha^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad \alpha_1^2 = \gamma_2^2 + \alpha^2, \quad \alpha_2^2 = \gamma_1^2 + \alpha^2, \quad (3)$$

$$\alpha^2 = \omega \sqrt{m_0 / D}$$

Граничные условия на защемленных краях пластины:

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

на свободных краях:

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (5)$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = 0.$$

где M_y, V_y – соответственно изгибающий момент и перерезывающая сила.

Вблизи границ $x = \pm a/2$ существенными являются первый и второй члены амплитудной функции (2). Тогда, принимая $C_2 = 0$, и подставляя (2) в первую пару граничных условий (4), получим систему уравнений:

$$C_0 \cos 0,5\gamma_1 a + C_1 = 0, \quad (6)$$

$$C_0 \gamma_1 \sin 0,5\gamma_1 a - C\alpha_1 = 0.$$

Составляя определитель этой системы, разворачивая его, и учитывая, что $\alpha_1 = \sqrt{\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2}$ приходим к частотному уравнению:

$$tg \left(\gamma_1 \frac{a}{2} \right) = -\sqrt{1 + 2\nu^2}, \quad (7)$$

где $\nu = \gamma_2 / \gamma_1$.

Вблизи границ $y = \pm b/2$ существенными являются первый и третий члены амплитудной функции (2). Принимая $C_1 = 0$, подставляя (2) во вторую пару граничных условий запишем:

$$-C_0 \cos 0,5\gamma_2 b (\gamma_2^2 + \mu \gamma_1^2) + C_2 (\alpha_2^2 - \mu \gamma_1^2) = 0, \quad (8)$$

$$C_0 \gamma_2 \sin 0,5\gamma_2 b [\gamma_2^2 + (2 - \mu) \gamma_1^2] + C_2 \alpha_2 [\alpha_2^2 - (2 - \mu) \gamma_1^2] = 0.$$

Приравняв к нулю определитель полученной системы уравнений, приходим ко второму частотному уравнению:

$$tg \left(\nu \gamma_1 \frac{b}{2} \right) = \theta^2 \sqrt{1 + \frac{2}{\nu^2}}, \quad (9)$$

где $\theta = \frac{\nu^2 + \mu}{\nu^2 + 2 - \mu}$.

Решая частотные уравнения (7) и (9), можно найти величины коэффициентов γ_{1k} и γ_{2k} для различных форм колебаний, а затем из соотношений (3) определить коэффициенты $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \alpha_k$ и частоту колебаний ω_k :

$$\omega_k = \alpha_k^2 \sqrt{D / m_0}. \quad (10)$$

Далее из уравнений (6), (8) можно выразить постоянные интегрирования C_1 и C_2 через C_0 и записать амплитудную функцию для k -той формы колебаний в виде:

$$w_k(x, y) = C_0 \left[\cos \gamma_{1k} x \cdot \cos \gamma_{2k} y - e^{-\alpha_{1k} \left(\frac{a}{2} \pm x\right)} \cos \gamma_{1k} \frac{a}{2} \cos \gamma_{2k} y + \theta e^{-\alpha_{2k} \left(\frac{b}{2} \pm y\right)} \cos \gamma_{2k} \frac{b}{2} \cos \gamma_{1k} x \right]. \quad (11)$$

Выразим из уравнения (7) отношение ν :

$$\nu = \sqrt{0,5 [tg^2(0,5\alpha\gamma_1) - 1]}. \quad (12)$$

Полагая, что коэффициенты γ_1, γ_2 , а, следовательно, и их отношение ν – действительные числа, значения тангенсов в выражении (12) должны удовлетворять условиям:

$$tg(0,5\alpha\gamma_1) \geq 1 \text{ или } tg(0,5\alpha\gamma_1) \leq -1.$$

Эти условия выполняются при значениях коэффициента γ_1 , лежащих в диапазонах:

$$\frac{4j-3}{2a} \pi \leq \gamma_1 \leq \frac{4j-1}{2a} \pi, j = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

Значения коэффициентов частотных уравнений и собственных частот

i	γ_1, M^{-1}	γ_2, M^{-1}	ν^2	α_1, M^{-1}	α_2, M^{-1}	α^2, M^{-2}	ω, c^{-1}
$j = 1; 2,618 \leq \gamma_1 \leq 7,854$							
1	2,738	0,7623	0,0775	2,943	3,946	8,078	99,7
2	4,173	8,436	4,087	12,639	10,295	88,581	1093
3	4,453	12,775	8,230	18,607	14,243	183,03	2259
4	4,658	18,514	15,798	26,594	19,651	364,46	4498
5	4,765	23,446	24,212	33,499	24,396	572,44	7064
6	4,845	28,871	35,509	41,116	29,673	857,00	10576
7	4,899	33,973	48,089	48,293	34,672	1178,13	14539
8	4,942	39,364	63,446	55,889	39,980	1573,99	19425
9	4,974	44,465	79,922	63,079	45,017	2001,83	24705
10	5,000	49,775	99,094	70,570	50,275	2502,55	30884
...
∞	5,236	∞	∞	∞	∞	∞	∞
...
10	5,495	49,790	82,106	70,627	50,392	2509,19	30966
9	5,527	44,451	64,677	63,106	45,133	2006,44	24761
8	5,567	39,314	49,871	55,876	40,094	1576,57	19456
7	5,622	33,943	36,451	48,331	34,862	1183,72	14608
6	5,693	28,898	25,767	41,263	29,999	867,52	10706
5	5,807	23,377	16,206	33,567	24,778	580,22	7161
4	5,961	18,601	9,737	26,973	20,422	381,54	4709
3	6,319	12,490	3,907	18,760	15,358	195,93	2418
2	6,703	8,879	1,755	14,234	12,989	123,77	1528
1	7,821	1,111	0,0202	7,977	11,116	62,40	770
$j = 2; 13,090 \leq \gamma_1 \leq 18,326$							
1	13,108	1,390	0,0112	13,255	18,590	173,77	2144
2	13,646	9,522	0,487	19,172	21,520	276,88	3417
3	13,799	11,570	0,703	21,405	22,687	324,29	4002
4	14,264	19,326	1,836	30,829	27,935	576,93	7120
5	14,414	22,734	2,488	35,234	30,535	724,60	8942
6	14,639	29,384	4,029	44,059	35,945	1077,73	13300
7	14,746	33,552	5,177	49,688	39,505	1343,17	16576
8	14,871	39,635	7,103	57,991	44,869	1792,07	22116
9	14,946	44,199	8,745	64,268	48,993	2176,91	26865
10	15,025	49,978	11,065	72,259	54,307	2723,54	33612
...
∞	15,708	∞	∞	∞	∞	∞	∞
...
10	16,450	50,038	9,253	72,652	55,182	2774,43	34240
9	16,544	44,139	7,118	64,577	49,956	2221,94	27421
8	16,630	39,713	5,703	58,573	46,155	1853,68	22876
7	16,784	33,442	3,970	50,184	41,009	1400,06	17278
6	16,905	29,521	3,050	45,041	37,987	1157,23	14281
5	17,186	22,523	1,718	36,192	33,136	802,62	9905
4	17,336	19,539	1,270	32,620	31,350	682,30	8420
3	17,838	11,362	0,406	24,008	27,667	447,29	5520
2	17,948	9,665	0,290	22,560	27,160	415,54	5128
1	18,313	1,608	0,0077	18,454	25,949	337,96	4171

i	γ_1, M^{-1}	γ_2, M^{-1}	ν^2	α_1, M^{-1}	α_2, M^{-1}	α^2, M^{-2}	ω, c^{-1}
$j = 3; 23,562 \leq \gamma_j \leq 28,798$							
1	23,572	1,790	0,0058	23,707	33,383	558,82	6896
2	23,802	9,732	0,1672	27,494	35,039	661,22	8160
3	23,866	11,236	0,2216	28,672	35,573	695,82	8587
4	24,251	19,864	0,6709	37,111	39,633	982,67	12127
5	24,344	22,118	0,8255	39,637	40,920	1081,84	13351
6	24,627	29,926	1,477	48,965	45,918	1502,01	18536
7	24,721	33,016	1,784	52,833	48,087	1701,20	20994
8	24,905	40,077	2,590	61,908	53,354	2226,41	27476
9	24,987	43,796	3,072	66,787	56,274	2542,42	31376
10	25,109	50,329	4,018	75,475	61,595	3163,49	39041ë
...
∞	26,180	∞	∞	∞	∞	∞	∞
...
10	27,326	50,405	3,403	76,342	63,515	3287,41	40570
9	27,466	43,685	2,530	67,610	58,456	2662,75	32861
8	27,551	40,185	2,127	63,157	55,973	2373,91	29296
7	27,759	32,875	1,403	54,149	51,204	1851,33	22848
6	27,851	30,059	1,165	50,822	49,547	1679,25	20724
5	28,151	21,971	0,6091	41,927	45,471	1275,18	15737
4	28,231	19,976	0,5007	39,938	44,643	1196,03	14760
3	28,575	11,209	0,1539	32,678	41,937	942,18	11627
2	28,625	9,730	0,1155	31,761	41,635	914,06	11280
1	28,790	1,953	0,0046	28,922	40,762	832,69	10276
$j = 4; 34,034 \leq \gamma_j \leq 39,270$							
1	34,040	2,102	0,0038	34,170	48,186	1163,16	14355
2	34,1585	9,704	0,0807	36,812	49,272	1260,97	15562
3	34,196	11,214	0,1075	37,694	49,643	1295,12	15983
4	34,462	20,104	0,3403	44,676	52,720	1591,80	19644
5	34,517	21,835	0,4002	46,314	53,476	1668,21	20587
6	34,777	30,281	0,7582	55,166	57,757	2126,39	26242
7	34,844	32,620	0,8765	57,813	59,096	2278,21	28115
8	35,0475	40,463	1,333	67,103	63,983	2865,56	35364
9	35,115	43,395	1,527	70,706	65,949	3116,23	38457
10	35,266	50,677	2,065	79,875	71,102	3811,85	47043
...
∞	36,652	∞	∞	∞	∞	∞	∞
...
10	38,114	50,763	1,774	81,280	74,042	4029,52	49729
9	38,277	43,281	1,279	72,192	69,307	3338,38	41199
8	38,343	40,547	1,118	68,980	67,708	3114,25	38433
7	38,555	32,534	0,7121	60,029	63,494	2544,97	31407
6	38,616	30,383	0,6191	57,771	62,494	2414,33	29795
5	38,868	21,771	0,3137	49,585	59,122	1984,70	24493
4	38,915	20,145	0,2680	48,229	58,605	1920,19	23697
3	39,143	11,232	0,0823	42,243	56,485	1658,33	20465
2	39,174	9,677	0,0610	41,496	56,239	1628,25	20094
1	39,265	2,230	0,0032	39,391	55,573	1546,68	19098

Задавая значения γ_1 из этих диапазонов, можно по формуле (12) вычислить отношение ν , затем методом последовательных приближений найти значения γ_j , удовлетворяющие уравнению (9), а после этого определить γ_2 из соотношения: $\gamma_2 = \nu\gamma_1$.

В качестве примера в таблице приведены значения коэффициентов, входящих в частотные уравнения, и собственных частот для 10 первых и 10 последних частот из первых четырех диапазонов ($j = 1 - 4$) для стальной квадратной пластины толщиной $\delta = 8$ мм с размерами сторон $a = b = 0,6$ м.

Данные этой таблицы показывают, что первые частоты от начала и от конца диапазона отличаются друг от друга, но с увеличением номера частоты это отличие уменьшается. Например, для четвертых частот от краев первого диапазона различие в значениях не превышает 5%, а для пятых частот составляет около 1%.

Каждый из диапазонов (13) содержит бесконечное множество собственных частот. При этом значения частот с увеличением γ_1 до величины, определяемой по формуле:

$$\gamma_1 = \frac{(2j-1)\pi}{a} \quad (14)$$

возрастают, стремясь к бесконечности, а при дальнейшем увеличении γ_1 – уменьшаются. При росте числа j , что соответствует росту значений собственных частот, диапазоны изменения параметра γ_1 сужаются.

Анализ полученных данных показывает, что за исключением нескольких первых от краев диапазона частот коэффициент γ_2 можно вычислить по приближенной формуле

$$\gamma_2 \approx \frac{(2i-1)\pi}{2b}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Эта формула дает завышенные значения γ_2 для нечетных i и заниженные значения для четных i . Для пятых частот от краев первого диапазона ($i = 5, j = 1$) эти погрешности не превышают 1% и уменьшаются по мере роста частот.

При больших частотах, для которых $j \gg 1$ на основании соотношений (3) и формул (10), (14), (15) можно записать:

$$\omega_{ij} = \pi^2 \left(\frac{4j^2}{a^2} + \frac{(2i-1)^2}{4b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m_0}} \quad (16)$$

Если при больших частотах удовлетворяются условия $j \gg 1$ и $i \gg 1$, то из (15) следует: $\gamma_2 = \pi/b$ и собственные частоты определяются по формуле:

$$\omega_{ij} = \pi^2 \left(\frac{4j^2}{a^2} + \frac{i^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{m_0}} \quad (17)$$

В частном случае, если пластина квадратная с размером стороны b , то вместо формулы (16) имеем:

$$\omega_{ij} = \frac{\pi^2}{4} (16j^2 + (2i-1)^2) \sqrt{\frac{D}{m_0 b^4}},$$

а вместо формулы (17) –

$$\omega_{ij} = \pi^2 (4j^2 + i^2) \sqrt{\frac{D}{m_0 b^4}}.$$

Рассмотрим изменение амплитудных функций вдоль осей x и y .

Принимая в формуле (11) $y = 0$, или $x = 0$ для осей x и y получим:

$$w(x, 0) = C_0 \left[\left(1 + \theta e^{-\alpha_2 \frac{b}{2}} \cos \gamma_2 \frac{b}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \cos \gamma_1 x - e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} \pm x \right)} \cos \gamma_1 \frac{a}{2} \right] \quad (18)$$

$$w(0, y) = C_0 \left[\left(1 - e^{-\alpha_1 \frac{a}{2}} \cos \gamma_1 \frac{a}{2} \right) \cos \gamma_2 y + \right. \\ \left. + \theta e^{-\alpha_2 \left(\frac{b}{2} \pm y \right)} \cos \gamma_2 \frac{b}{2} \right] \quad (19)$$

Формы колебаний, соответствующие первой из этих функций, показаны на рис. 1а, а формы, соответствующие второй функции – на рис. 1б. Из этих рисунков следует, что индекс j показывает количество узловых линий перпендикулярных к оси x , включая точки закрепления краев пластины. Это количество равно $2j$.

Индекс i показывает количество узловых линий перпендикулярных оси y . Значению $i = 1$ соответствует цилиндрический изгиб пластины, когда по оси y узловых линий нет. При $i = 2$ и 3 формы колебаний качественно одинаковы, имеют две узловые линии, но незначительно отличаются численно. То же самое можно сказать и о формах колебаний при $i = 4, 5$ и $i = 6, 7$. Если принять, что смежные четные и нечетные формы одинаковы, и учитывать только четные формы колебаний, то число узловых линий перпендикулярных оси y равно i .

Для полноты описания колебаний пластины, жестко защемленной по двум противоположным краям, рассмотрим еще два случая.

Допустим, края пластины $y = \pm b/2$ свободно оперты. В этом случае первое частотное урав-

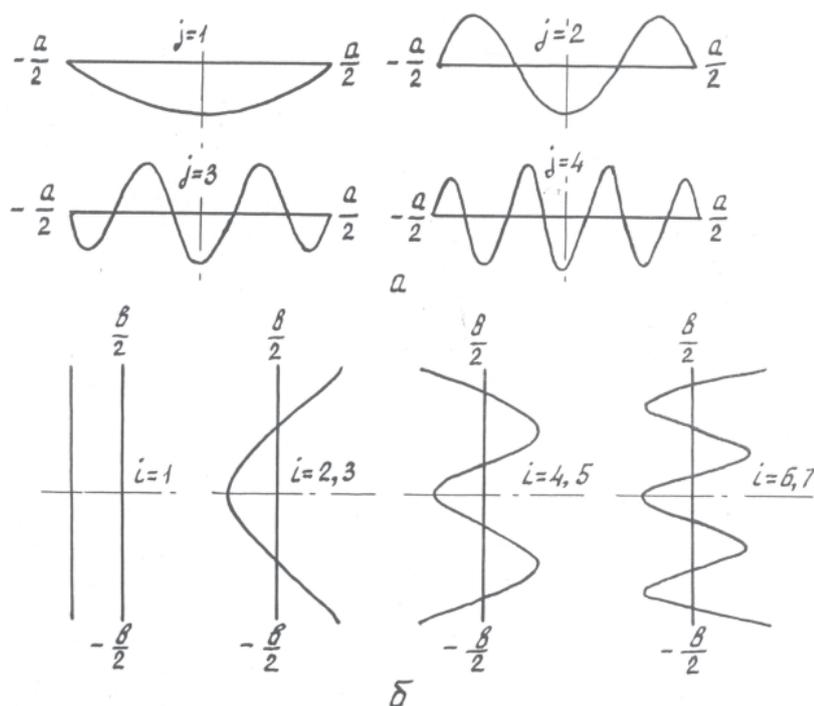


Рис. 1. Амплитудные функции вдоль осей x (а) и y (б).

нение, определяемое граничными условиями на защемленных краях, остается прежним (7).

Граничные условия на свободно опертых краях имеют вид:

$$y = \pm \frac{b}{2}, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

Подстановка в эти граничные условия функции (2) при $C_1 = 0$ приводит к частотному уравнению:

$$\cos \gamma_2 \frac{b}{2} = 0, \quad (21)$$

из которого следует:

$$\gamma_2 = \frac{(2i-1)\pi}{b}. \quad (22)$$

При этом $C_2 = 0$ и амплитудная функция имеет вид:

$$w(x, y) = C_0 \left[\cos \gamma_1 x - e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} \pm x\right)} \cos \gamma_1 \frac{a}{2} \right] \times \quad (23)$$

$\times \cos \gamma_2 y$

Если все края пластины жестко защемлены, то в соответствии с решением, приведенным в [1], первое частотное уравнение по-прежнему имеет вид (7), а второе частотное уравнение выражается равенством:

$$\operatorname{tg} \left(\gamma_2 \frac{b}{2} \right) = -\sqrt{1 - \frac{2}{\nu^2}}. \quad (24)$$

В этом случае амплитудная функция записывается в виде:

$$w(x, y) = C_0 \left[\cos \gamma_1 x \cos \gamma_2 y - e^{-\alpha_1 \left(\frac{a}{2} \pm x\right)} \cos \gamma_1 \frac{a}{2} \cos \gamma_2 y - e^{-\alpha_2 \left(\frac{b}{2} \pm y\right)} \cos \gamma_2 \frac{b}{2} \cos \gamma_1 x \right]. \quad (25)$$

Для частного случая, когда пластина квадратная и число узловых линий по осям x и y одинаково, в работе [1] получено:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma; \quad \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 3\gamma^2; \quad \alpha^2 = 2\gamma^2; \quad \gamma = \frac{3k-1}{3b}\pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

$$w(x, y) = C_0 \left[\cos \gamma x \cos \gamma y - \cos \gamma \frac{b}{2} \left(e^{-\gamma \sqrt{3} \left(\frac{b}{2} \pm x\right)} \cos \gamma y + e^{-\gamma \sqrt{3} \left(\frac{b}{2} \pm y\right)} \cos \gamma x \right) \right]. \quad (27)$$

Из анализа формул (18), (19), (23), (25) следует, что в рассматриваемом примере граничные условия на краях пластины оказывают влияние на амплитуду колебания центра пластины только при первой низшей частоте ($j = 1, i = 1$). При второй частоте граничные условия изменяют амплитуду колебания центра пластины на 3,5%, а при пятой и более высоких частотах – менее, чем на 1%.

В работе [2] отмечается, что в общем случае граничные условия на краях пластины оказывают заметное влияние на амплитудную функцию на расстояниях меньших длины полуволны. Основываясь на этом? можно сделать заключение, что при рассмотрении высокочастотных колебаний центра пластины граничные условия на её краях можно не учитывать. Это обстоятельство позволяет существенно упростить решение задачи о колебаниях пластин при ударе, поскольку спектр ударного импульса обычно характеризуется высокими частотами. При этом в

амплитудных функциях, выписанных выше, достаточно ограничиться только первым членом, вид которого не зависит от граничных условий на краях пластины.

Литература

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 480 с.
2. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок // Инженерный сборник. Т. 31. – М.: Институт механики АН СССР, 1961. – С. 3–14.
3. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластин и оболочек: Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1964. – 287 с.
4. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. Т. 3 / Под ред. д-ра техн. наук И.А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийск. ССР Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.