

УДК 537.523 (575.2) (04)

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА СТЕНКЕ КАМЕРЫ  
МИКРОВОЛНОВОЙ ПЕЧИ НА ОСОБЕННОСТИ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА  
КЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

П.В. Козлов – канд. физ.-мат. наук

Построена математическая модель нестационарного нагрева керамической пластины микроволновым излучением. Получена формула для временной зависимости подводимой мощности микроволнового излучения, при которой реализуется линейное изменение температуры керамической пластины за все время нагрева.

*Ключевые слова:* микроволновое излучение; микроволновый нагрев керамики; коэффициент поглощения.

Полезную информацию об изменении характеристик керамического материала при микроволновом нагреве и подводимого к нему электромагнитного поля можно получить на основе упрощенных подходов, основанных на решении одномерных моделей. Это позволяет устранить воздействие двух- и трехмерных геометрических эффектов и соответствующих им граничных условий, более детально выявить физику микроволнового нагрева керамики и установить влияние на ее нагрев как геометрических параметров пластины и печи, так и теплофизических и электромагнитных свойств (коэффициентов) керамики и частоты электромагнитного поля. Такой подход реализован в работах [1, 2]. В данной работе рассмотрена задача управления динамикой микроволнового нагрева керамической пластины посредством задания различных вариантов граничных условий на стенке камеры микроволновой печи.

**Математическая модель.** Рассматривается однородная керамическая пластина, расположенная в центре микроволновой печи с охлаждаемыми стенками в поле плоской электромагнитной волны  $\vec{E}(0,0,E_z = E(x) \exp(i\omega t)$ ,  $\vec{B}(0,B_y = B(x) \exp(i\omega t)$ , распространяющейся вдоль оси  $x$  (рис. 1). Предполагается, что вкладом теплового излучения керамического материала можно пренебречь, окружающая газовая среда неподвижна, размер пластины в направлении оси  $x$  существенно меньше, чем по другим осям. Начало координат располагается в центральной плоскости пластины.

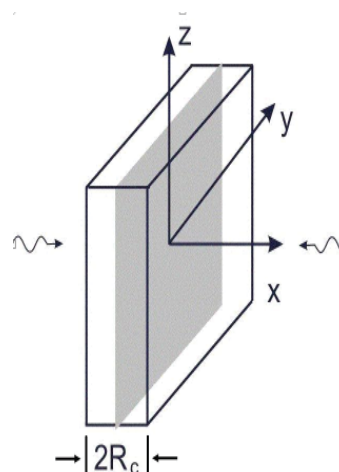


Рис. 1. Схема симметричного подвода микроволновой мощности к керамической пластине толщиной  $2R_c$  в декартовых координатах  $(x,y,z)$ .

Теплофизические и электромагнитные характеристики пластины при микроволновом нагреве в области  $[t \geq 0, -R_c \leq x \leq R_c]$  находятся из совместного решения приведенного волнового уравнения и уравнения баланса энергии, которые для плоского слоя имеют вид:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 E = 0, \tag{1}$$

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + \frac{1}{2} \sigma |E|^2. \tag{2}$$

Здесь  $T$  – температура;  $E$  – напряженность электрического поля;  $\varepsilon_c = \varepsilon_r(T) - i\varepsilon_i(T)$  – комплексная диэлектрическая проницаемость;  $k = k_0\sqrt{\varepsilon_c}$ ,  $k_0 = \omega/c$  – волновое число в вакууме;  $\rho(T)$ ,  $C_p(T)$ ,  $\lambda(T)$  – плотность, теплоемкость, теплопроводность керамики при  $x < R_c$ , либо воздуха при  $x > R_c$ .

Для случая симметричного подвода электромагнитной энергии совместное решение уравнений (1), (2) проводится в области изменения аргумента  $[0 \leq x \leq R]$ , где  $R$  – координата стенки микроволновой печи. На оси выполняются условия симметрии, температура и напряженность электрического поля достигают своих экстремальных значений. Внутренняя поверхность стенок камеры микроволновой печи путем внешнего охлаждения поддерживается при постоянной температуре  $T_R = \text{const}$ .

Начальные и граничные условия запишутся так:

$$\begin{aligned} t = 0, 0 \leq x \leq R: T(x, 0) = T_R; \\ t > 0, x = 0: \partial T / \partial x = 0, \partial E / \partial x = 0; \\ x = R: T = T_R, E = E_R(t). \end{aligned} \quad (3)$$

На контактных поверхностях (керамика – воздух) выполняется непрерывность температуры, тепловых потоков, напряженностей электрических и магнитных полей.

**Метод решения.** Общее решение приведенного волнового уравнения (1) строится на основе приближения однородных коэффициентов [2], в соответствии с которым пространственное распределение коэффициентов керамического изделия в области диссипации энергии электромагнитного поля и окружающей газовой среды полагаются постоянными:

$$\begin{aligned} 0 \leq x < R_c: \sigma = \sigma(T_0), \lambda = \lambda(T_0), \varepsilon_c = \varepsilon_c(T_0), \\ R_c < x \leq R: \sigma = 0, \lambda = \lambda_{air}(T_0), \varepsilon_c = 1. \end{aligned}$$

Здесь  $T_0(t)$  – температура в центре пластины.

Для поля  $E(x)$  имеем следующее решение:

$$\begin{aligned} E(x, t) = E_0(t) \cos(kx), 0 \leq x \leq R_c; \\ E(x, t) = A(t) \exp(ik_0x) + B(t) \exp(-ik_0x), R_c \leq x \leq R, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $E_0(t)$  – напряженность электрического поля в центре плоского слоя;  $A(t)$ ,  $B(t)$  – амплитуды падающей и отраженной электромагнитных плоских волн.

Коэффициенты суперпозиции  $A(t)$ ,  $B(t)$  находятся из условия непрерывности напряженности электрического поля  $E$  и ее производной на границе раздела  $x = R_c$  по формулам

$$R_c < x \leq R: \sigma = 0, \lambda = \lambda_{air}(T_0), \varepsilon_c = 1, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = \cos(kR_c) + i\sqrt{\varepsilon_c} \sin(kR_c), \\ f_2 = \cos(kR_c) - i\sqrt{\varepsilon_c} \sin(kR_c). \end{aligned} \quad (6)$$

Для коэффициента отражения, поглощения, подводимой и диссипированной плотности мощности микроволнового излучения имеем соотношения

$$\kappa_r = \left| \frac{f_2}{f_1} \right|^2, \kappa_d = 1 - \kappa_r, \quad (7)$$

$$Q_n = \frac{|A|^2}{c\mu_0}, Q_d = Q_n \kappa_d.$$

Напряженность электрического поля на оси симметрии зависит от граничного условия на охлаждаемых металлических стенках камеры микроволновой печи.

При задании подводимой мощности микроволнового излучения  $Q_n(t)$  амплитуды электрического поля  $E_0$  и  $E_R$  рассчитываются по формулам:

$$E_0 = \frac{2\sqrt{\mu_0 c Q_n(t)}}{f_1}, \quad (8)$$

$$E_R = \sqrt{\mu_0 c Q_n(t)} \left| 1 + \frac{f_2}{f_1} \exp(-2ik_0R) \right|.$$

При задании на металлических стенках камеры напряженности электрического поля  $E_R$  амплитуды электрического поля  $E_0$  рассчитываются по формуле:

$$E_0 = \frac{2E_R(t)}{f_1 \exp(ik_0R) + f_2 \exp(-ik_0R)}. \quad (9)$$

В этом случае для расчета подводимой мощности, соответствующей заданной амплитуде  $E_R$ , используются соотношения (5)–(7).

Уравнение теплового баланса (2) решается численно методом линий, для чего выполняется дискретизация уравнения по пространственной переменной  $x$  методом контрольного объема [3]. Граничные точки контрольных объемов изображаются на схеме (рис. 2) точками, а центральные узлы объемов

$$x_j = (j - 1/2)\Delta x, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta x = R/(n - 1),$$

в которых выполняется расчет полей  $T$  и  $E$ , отмечаются символом “\*”.

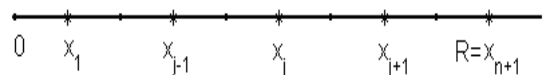


Рис. 2. Пространственная сетка для метода контрольного объема при симметричном подводе мощности электромагнитного поля.

Для вывода уравнений выполняется интегрирование уравнения баланса энергии (2) по контрольным объемам и осуществляется переход к конечно-разностным аналогам производных по пространственной переменной. В итоге получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих динамику изменения по времени температуры в узлах пространственной сетки  $x_j$ :

$$(\rho C_p)_j \frac{dT_j}{dt} = a_j T_{j-1} - b_j T_j + c_j T_{j+1} + q_j, \quad (10)$$

$$a_j = \frac{2\lambda_{j-1}\lambda_j}{(\lambda_{j-1} + \lambda_j)\Delta x^2}, \quad b_j = a_j + c_j, \quad c_j = a_{j+1},$$

$$q_j = \begin{cases} 1/2\sigma_j |E_j|^2, & x_j < R_c, \\ 0, & x_j > R_c, \end{cases} \quad j = 2, 3, \dots, n-1.$$

Для замыкания системы уравнений (10) используются граничные условия (3), из которых следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения в начальном ( $j = 1$ ) и конечном ( $j = n$ ) узлах пространственной переменной  $x_j$ :

$$(\rho C_p)_1 \frac{dT_1}{dt} = -b_1 T_1 + c_1 T_2 + q_1,$$

$$(\rho C_p)_n \frac{dT_n}{dt} = a_n T_{n-1} - b_n T_n + q_n, \quad q_n = c_n T_R.$$

В матричной форме система дифференциальных уравнений (10) записывается так

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = AT + Q,$$

где  $A$  – трехдиагональная матрица;  $T$  и  $Q$  – векторы-столбцы определяются в следующем виде:

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & -b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & -b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n & -b_n \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ 0 \\ c_n T_R \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ \dots \\ T_{n-1}(t) \\ T_n(t) \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $C_p$  вычисляются в узлах пространственной сеточной области  $x_j$  как функции температуры  $T_j$ . Численное решение уравнений выполняется в системе компью-

терной математики Matlab 7 с использованием функции ode23t.

Температура в центре плоского слоя ( $x_1 = 0$ ) находится после решения системы уравнений (10) по формуле  $T_0(t) = (9T_1(t) - T_2(t)) / 8$ .

**Результаты.** Проведено численное исследование динамики нагрева керамической пластины из окиси алюминия в поле электромагнитного излучения в неподвижном воздухе при атмосферном давлении, коэффициенты  $\lambda$ ,  $\epsilon_r$ ,  $\epsilon_i$  берутся из [2]. Расчеты проводились при следующих параметрах:  $R_c = 15$  мм,  $R = 50$  мм,  $f = 30$  ГГц. Рассмотрены следующие варианты задания граничных условий:

1.  $Q_n = \text{const}$  – модель с фиксированной в процессе нагрева подводимой плотностью мощности излучения. В расчетах задавались значения 8, 12, 16 и 20 Вт / см<sup>2</sup>.

2.  $E_R = \text{const}$  – модель с фиксированной амплитудой электрического поля на границе микроволновой камеры. В расчетах задавались значения 30, 40, 50 В/см.

Заметим, что формулы (5)–(9) позволяют заранее просчитать температурные зависимости таких характеристик, как амплитуду электрического поля в центре пластины и плотность диссипированной мощности электромагнитной волны, зависящих от варианта граничных условий. В то же время коэффициент поглощения мощности явно зависит только от толщины пластины, частоты электромагнитного поля и максимальной температуры в пластине  $T_0$  и не зависит от граничных условий. Естественно, что все особенности, присущие температурным зависимостям перечисленных выше характеристик проявят себя в процессе нагрева керамического материала при достижении соответствующих температурных интервалов.

На рис. 3 видно, что коэффициент поглощения алюминиевой керамики имеет немонотонный характер изменения, число точек экстремумов зависит от частоты и увеличивается с ростом частоты. Формула для коэффициента поглощения [2]

$$\eta = \frac{2F}{1+F}, \quad F = \frac{\sqrt{\epsilon'} \operatorname{tg} \delta (1 + \frac{\sin 2\xi}{2\xi}) \xi}{1 + (\epsilon' - 1) \sin^2 \xi}, \quad (11)$$

$$\xi = (\omega / c) R_c \sqrt{\epsilon_r},$$

полученная в приближении  $\operatorname{tg} \delta = \epsilon_i / \epsilon_r \ll 1$ ,  $k_0 R_c \sqrt{\epsilon_r} \operatorname{tg} \delta \ll 1$ , справедлива для керамических материалов типа окиси алюминия, дает явную зависимость коэффициента поглощения от ча-

стоты и показывает, что точки максимумов, при которых имеет место интенсивный рост температуры, приходится на целые значения величины  $\xi/\pi$ , а минимумы – на полуцелые значения.

При нагреве керамики в режиме  $Q_n = \text{const}$  в точке  $T_0 = 1405$  К максимума коэффициента поглощения также имеют место максимумы амплитуд электрического поля в центре пластины и на внутренней поверхности камеры (рис. 4а) и максимум в температурной зависимости диссипируемой мощности  $Q_d$  (рис. 5а). При температурах 836 К и 1865 К зависимость  $E_R(T_0)$  имеет минимумы, значения которых на порядок меньше соответствующих значений амплитуды электрического поля в центре пластины. Вследствие такого характера поведения  $E_R$  в режиме  $Q_n = \text{const}$ , нагрев керамики в режиме  $E_R = \text{const}$  требует резкого роста подводимой мощности при прохождении температур 836 К и 1865 К в

процессе нагрева и как следствие, в этих точках температурные зависимости  $E_0$  и  $Q_d$  также принимают экстремальные значения, на порядок больше соответствующих значений  $E_0$  и на два порядка больше значений  $Q_d$ , чем в режиме  $Q_n = \text{const}$  (рис. 4б и 5б).

Как видно на рис. 6, при  $Q_n \sim \text{const}$  закон изменения температуры близок к линейному на больших временных интервалах. При переходе через точки экстремумов зависимостей  $E_0(T_0)$  имеет место резонансное поглощение подводимой электромагнитной энергии, резкий нелинейный рост температуры на малых временных масштабах с последующим выходом на линейное нарастание температуры в процессе микроволнового нагрева керамического материала.

Численные расчеты показали, что перепад температуры  $\Delta T = T_0 - T_c \approx 10^\circ\text{C}$  при  $Rc = 15$  мм и  $f = 30$  ГГц, нормированный профиль про-

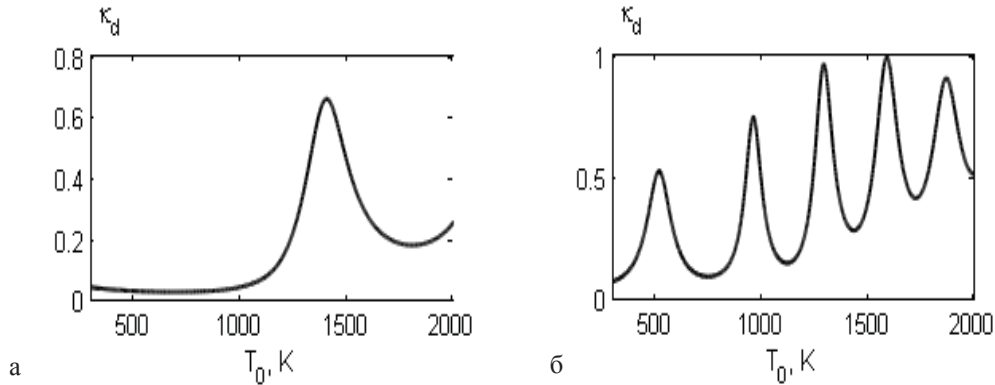


Рис. 3. Коэффициент поглощения как функция температуры  $T_0$  в центре пластины.  $f = 30$  (а) и  $100$  (б) ГГц.

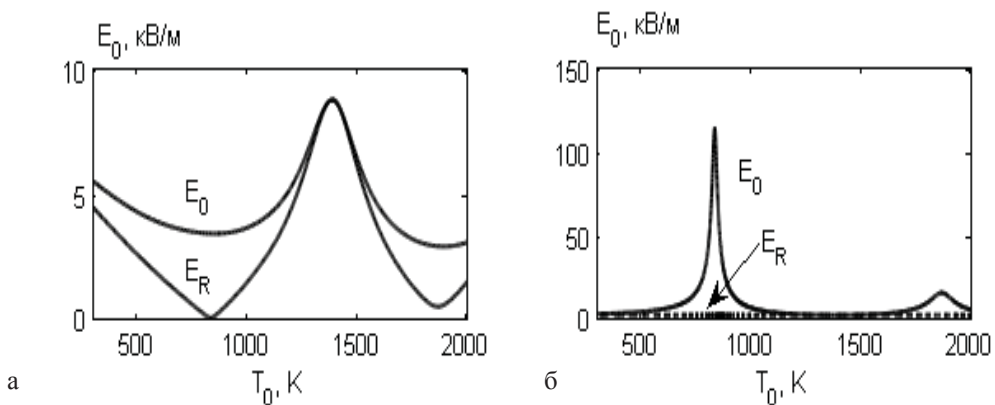


Рис. 4. Зависимость напряженности электрического поля в центре пластины и на границе камеры от температуры  $T_0$  при заданной подводимой мощности  $Q_n = 80$  кВт/м<sup>2</sup> (а) и заданной  $E_R = 3$  кВ/м (б);  $f = 30$  ГГц.

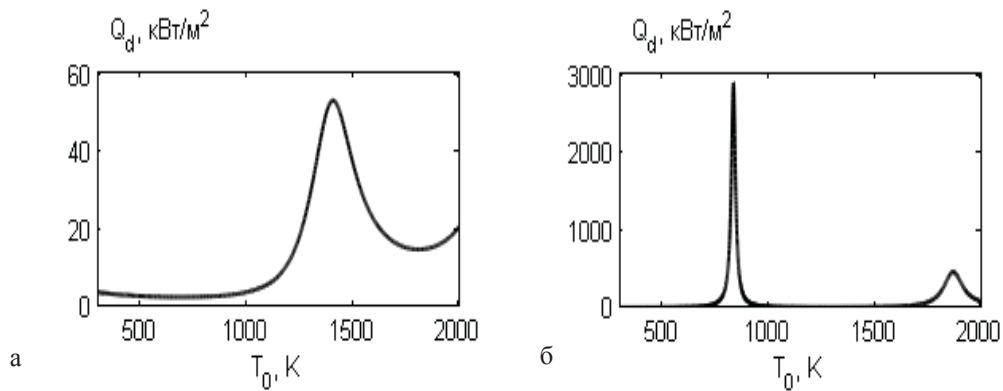


Рис. 5. Зависимость диссипированной мощности от температуры  $T_0$  при заданной подводимой мощности  $Q_n=80 \text{ кВт/м}^2$  (а) и заданной  $E_R=3 \text{ кВ/м}$  (б).

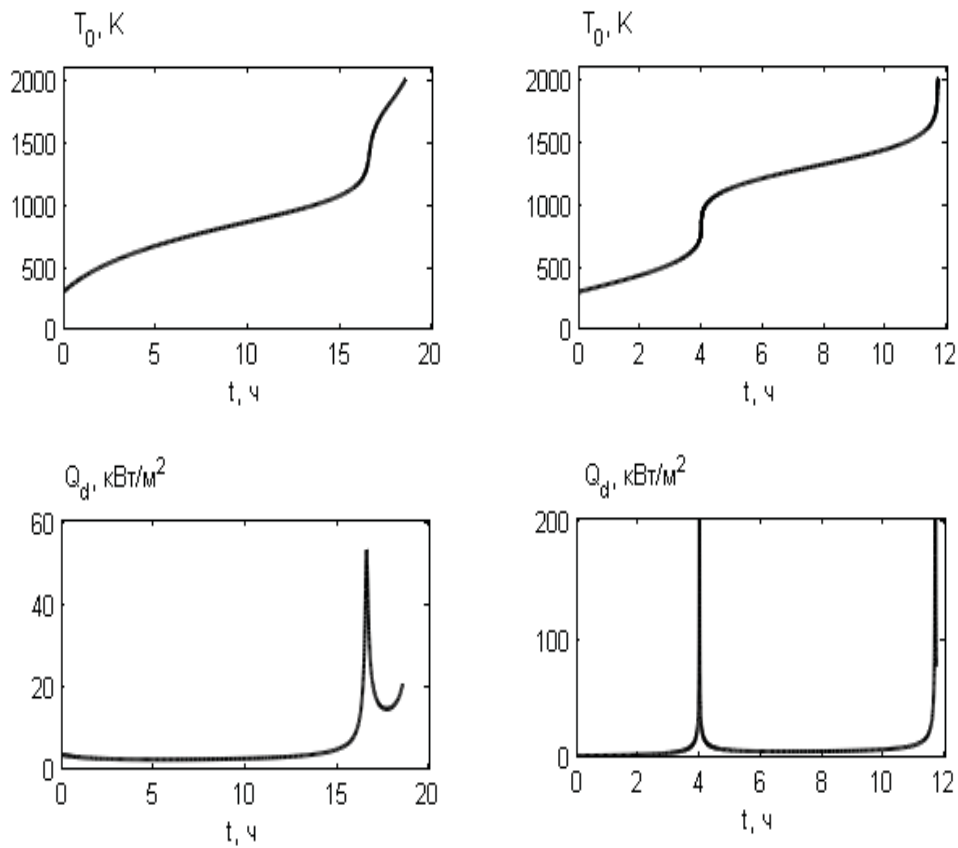


Рис. 6. Динамика изменения характеристик микроволнового нагрева пластины. Левая колонка – данные модели  $Q_n=\text{const}$ , правая – данные модели  $E_R=\text{const}$ .

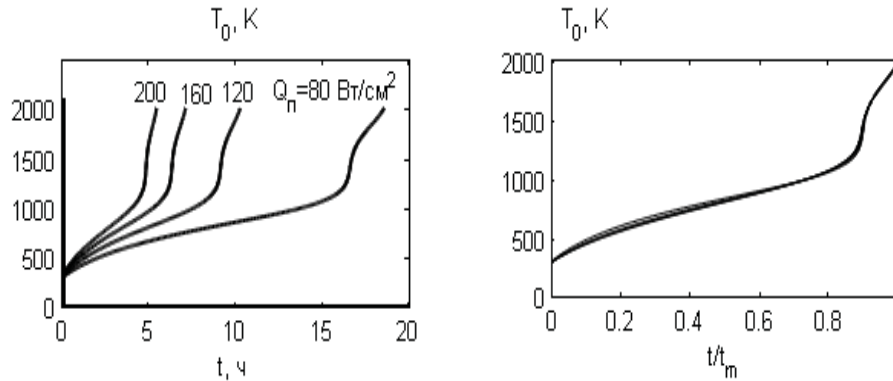


Рис. 7. Изменение температуры в центре пластины при варьировании подводимой мощности на естественных и нормированных временных масштабах;  $t_m$  – время нагрева до максимальной температуры 2000 К.

странственного распределения температуры в пластине  $\frac{T(x)-T_c}{T_0-T_c}$  близок к параболическому, а во временных зависимостях температуры при различных подводимых мощностях имеет место подобие (рис. 7).

Временную эволюцию температуры в центре пластины в камере с охлаждаемыми стенками можно описать следующей приближенной формулой:

$$\rho C_p \frac{dT_0}{dt} = \frac{Q_n(t)\kappa_d}{R_c} - \frac{S(T_0)}{R_c(R-R_c)},$$

$$S(T) = \int_{T_R}^T \lambda_{air} dT. \quad (12)$$

Несмотря на приближенный характер, формула (12) дает возможность восстановить зависимость времени нагрева керамической пластины до заданной температуры  $t(T_0)$  с высокой точностью ( $\approx 1 \div 2\%$ ). В случае нагрева пластины в камере с теплоизолированными стенками соотношение (12) принимает следующий вид:

$$\rho C_p \frac{dT_0}{dt} = \frac{Q_n(t)\kappa_d}{R_c}. \quad (13)$$

Формула (12) может использоваться для расчета используемого на практике режима нагрева, при котором температура заданной точки линейно меняется во времени до заданной максимальной температуры  $T_m$  за заданное время  $t_m$ :  $T = T_R + (T_m - T_R) \frac{t}{t_m}$ .

Для этого подводимая мощность должна изменяться во времени по закону

$$Q_n(t) = \frac{R_c}{\kappa_d} \left( \rho C_p \frac{T_m - T_R}{t_m} + \frac{S(T_0)}{R_c(R-R_c)} \right). \quad (14)$$

Характер изменения подводимой мощности представлен на рис. 8. Как видно, подъем температуры до 1000 К обеспечивается за счет нарастания  $Q_n$  до значений  $\sim 22$  кВт/м<sup>2</sup>, в дальнейшем подводимая мощность плавно падает до  $Q_n \sim 8$  кВт/м<sup>2</sup>, в то время как температура линейно нарастает до значения 2000 К.

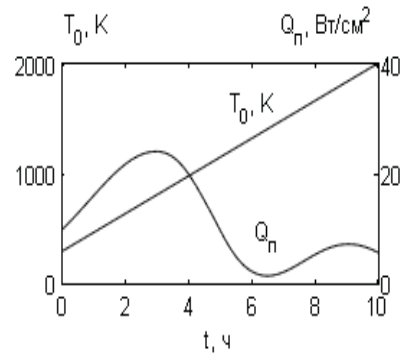


Рис. 8. Временная зависимость подводимой микроволновой мощности  $Q_n(t)$ , обеспечивающая линейное изменение температуры в процессе нагрева.  $f=30$  ГГц,  $R_c=15$  мм.

### Литература

1. Kozlov P.V., Rafatov I.R., Kulumbaev E.B., Lelevkin V.M. On modelling of microwave heating of a ceramic material // Journal of Physics D: Applied Physics. – 2007. – Vol. 40. – P. 2927–2935.
2. Моделирование и технология получения керамики на основе кремния / Под ред. В.М. Лелевкина, О.Н. Каньгиной. – Бишкек: КРСУ, 2008. – 222 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.