

УДК 537.876.4 (575.2) (04)

**РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СОСТОЯНИЙ  
КЕРАМИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА  
В ПРЯМОУГОЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ**

*В.Ю. Губин* – аспирант

The computer modeling of the stationary thermal conditions of the cylindrical ceramic sample in the rectangular resonator has been made on the basis of 2D equations of energy balance and the reduced wave equation. The comparison of dependences of the sample temperature on the supplied microwave power for an attuned and untuned resonator was made.

В настоящее время для производства инструментальных керамических материалов используется и активно исследуется высокотемпературный микроволновый нагрев, обладающий рядом преимуществ перед традиционным резистивным нагревом, главным из которых является объемный характер выделения тепла [1].

Зависимость физических свойств керамики от температуры и изменение их при нагреве приводят к возникновению в ней наблюдаемых на опыте температурной нестабильности перегретых областей, расстройки резонаторов и, как следствие, изменению диссипируемой в образце мощности СВЧ излучения [1–2].

Нагрев керамического материала  $Al_2O_3$  различными типами волн рассматривался в работах [1, 3–6]. Полученные в них аналитические и численные результаты показывают сложный характер зависимости стационарных тепловых состояний керамики от подводимой мощности СВЧ излучения. Так, зависимость температуры керамического цилиндра от подводимой мощности имеет характерную S-образную форму, обусловленную температурным изменением физических свойств самой керамики, и, в наибольшей степени, изменением ее комплексной диэлектрической проницаемости. В работе [4] разработана одномер-

ная модель микроволнового нагрева керамического образца в цилиндрическом резонаторе. Данная работа посвящена развитию этой модели на двумерную задачу расчета стационарных тепловых состояний керамического образца в прямоугольном резонаторе.

**Модель.** Рассматривается система микроволнового нагрева (рис. 1), состоящая из прямоугольного волновода  $I$  высотой  $b$  и шириной  $a$ ; резонатора  $II$  длиной  $l$  и шириной  $h$  с керамическим образцом  $III$  – цилиндром радиуса  $R$  и высотой  $b$ . СВЧ излучение подводится в резонатор  $H_{10}$ -волной по волноводу через отверстие связи  $3$ . В результате диссипации энергии электромагнитного поля керамический материал нагревается. Стационарность теплового состояния образца обеспечивается отводом выделившегося в нем тепла в окружающий воздух. Настройка резонатора на заданной частоте электромагнитного поля производится подбором его геометрических размеров. Для точной подстройки системы изменяется положение  $\Delta l$  короткозамыкающего поршня  $2$ .

Для математического описания стационарного теплового состояния керамического образца полагается, что все характеристики электромагнитного поля и керамики неизменны по высоте системы – вдоль оси  $у$  выбран-

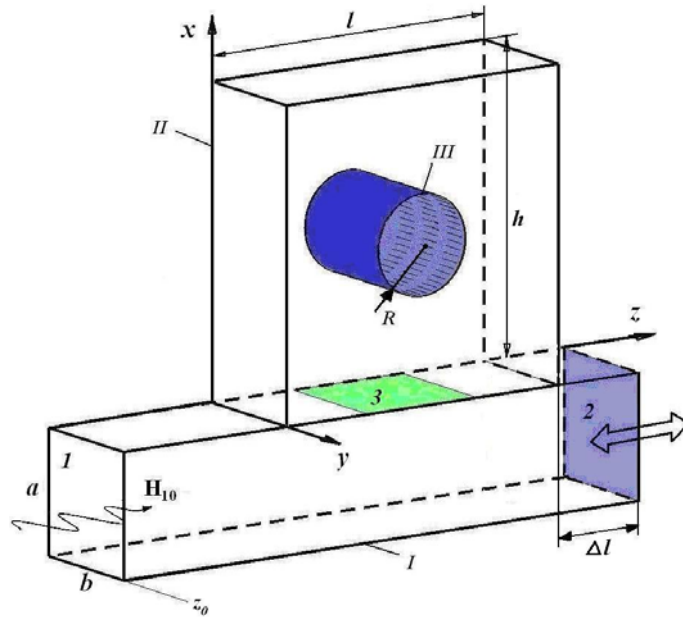


Рис. 1. Схема системы микроволнового нагрева:  
 I – прямоугольный волновод; II – резонатор; III – керамический образец;  
 1 – входное сечение волновода; 2 – поршень для настройки системы;  
 3 – отверстие связи волновода с резонатором.

ной декартовой системы координат  $(x, y, z)$  (рис. 1); конфигурация электромагнитного поля в резонаторе определяется волноводной  $H_{10}$ -волной  $\vec{E}(0; E_y = E; 0)e^{i(\omega t - kz)}$ ,  $\vec{B}(B_x; 0; B_z)e^{i(\omega t - kz)}$ .

Тогда стационарное уравнение баланса энергии в керамике и приведенное волновое уравнение запишутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} \omega \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_r - i\varepsilon_i) E = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  – напряженность электрического и индукция магнитного полей;  $T$  – температура;  $\omega = 2\pi f$ ;  $f$  – частота электромагнитного поля;  $k = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}$  – продольное волновое число в волноводе;  $\lambda$  – теплопроводность;  $\varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i$  – комплексная диэлектрическая проницаемость керамики;  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная;  $c$  – скорость света;  $i$  – мнимая единица.

*Граничные условия.* Температурное поле рассчитывается из уравнения (1) только в керамическом образце, на границе которого ставятся условия третьего рода – теплообмен с окружающим воздухом заданной температуры  $T_0$ :

$$r = R : -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_0),$$

где коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  цилиндра с горизонтально расположенной осью для свободной ламинарной конвекции рассчитывается по формулам [7]:

$$\text{Nu} = 0.47(\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{\frac{1}{4}}, \quad \text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda}.$$

Здесь  $\text{Pr} = \mu C_p / \lambda$  – число Прандтля;  $\text{Gr} = g\beta r^2 \Delta T / \nu^2$  – число Грасгофа;  $\text{Nu}$  – число Нуссельта;  $\mu, C_p, \beta$  – динамическая вязкость, удельная теплоемкость, температурный коэффициент объемного расширения воздуха;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $\Delta T = T - T_0$ ;  $L = 2R$  – характерный размер системы.

Для приведенного волнового уравнения (2) граничные условия ставятся по всему контуру расчетной области:

- во входном сечении одномодового прямоугольного волновода – суперпозиция падающей с амплитудой  $E_I$  и отраженной с амплитудой  $E_R$   $H_{10}$ -волн

$$E = [E_I \exp(-ikz) + E_R \exp(ikz)] \sin(\pi x / a) \quad (3)$$

преобразуется к виду условия излучения:

$$\frac{\partial E}{\partial z} - ikE = -2ikE_I \exp(-ikz) \sin(\pi x / a);$$

- на стенках конечной проводимости резонатора ставятся граничные условия Леонтовича [8], которые в рассматриваемом случае запишутся в виде:

$$x = 0; h \mid z = 0; l : \vec{E} = \frac{Z}{\mu_0} \vec{B} \times \vec{n},$$

где  $Z = (1 + i) \left( \frac{\omega \mu_0}{2\sigma} \right)^{1/2}$  – поверхностный импеданс;

$\sigma$  – электропроводность материала стенок резонатора;  $\vec{n}$  – внешняя нормаль к границе области определения поля;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;

- на идеально проводящих стенках волновода и поршня:  $E = 0$ .

**Метод решения.** Дискретизация уравнений (1–2) производится методом контрольных объемов [9]. Нелинейные дискретные аналоги приведенного волнового уравнения и уравнения баланса энергии решаются на каждой итерации последовательно методом исключения Гаусса. Поскольку приведенное волновое уравнение определяет напряженность электрического поля с точностью до произвольного постоянного множителя, то граничное условие на входе волновода заменяется соотношением  $z = z_0 : \vec{E} = \sin(\pi x / a)$ . Полученное численное решение  $\vec{E}(x, z)$  масштабируется  $E(x, z) = K_E \vec{E}(x, z)$  с коэффициентом  $K_E$ , определяемым через мощность падающей волны:

$$P_I = \frac{kE_I^2}{4\mu_0\omega} ab, \quad K_E = E_I / \vec{E}_I(a/2, z_0)$$

или диссипируемую в керамике мощность:

$$P_D^c = b \iint_S \frac{1}{2} \sigma |E|^2 dx dz, \quad K_E = \sqrt{P_D^c / \vec{P}_D^c},$$

где  $S$  – площадь сечения керамического цилиндра; амплитуды  $\vec{E}_I$ ,  $\vec{E}_R$  вычисляются по следующим из соотношения (3) формулам:

$$\vec{E}_I(a/2, z_0) = -\frac{\partial \vec{E} / \partial z - ik\vec{E}}{2ik \sin(\pi x / a)} e^{ikz};$$

$$\vec{E}_R(a/2, z_0) = +\frac{\partial \vec{E} / \partial z + ik\vec{E}}{2ik \sin(\pi x / a)} e^{-ikz}.$$

Корректность численного счета контролируется проверкой интегрального баланса энергии в виде:

$$P_I = P_R + P_D^c + P_D^r,$$

где принята во внимание идеальная проводимость стенок волновода и поршня, а поглощаемая резонатором мощность вычисляется как поток вектора Умова–Пойнтинга сквозь стенки резонатора  $P_D^r = \int (\vec{E} \times \vec{B} / \mu_0) \cdot d\vec{s}$ .

**Результаты.** Проводится расчет стационарных тепловых состояний керамического образца спеченной окиси алюминия  $Al_2O_3$  (плотностью 97%) для следующих значений внешних параметров задачи:  $f = 10$  ГГц;  $a = b = 20$  мм;  $R = 8$  мм. Физические свойства керамического материала взяты из [4]. Материал стенок резонатора – медь.

**Резонатор без керамического образца.**

Для апробации численной реализации электродинамической задачи проводится расчет характеристик электромагнитного поля в пустом (без керамического образца) резонаторе, который можно рассматривать как прямоугольный волновод закороченный на обоих концах с условием резонанса [10]:

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{m^2 / h^2 + p^2 / l^2 + q^2 / b^2}}, \quad (4)$$

где  $\lambda_0 = c / f$  – длина волны;  $m, p, q$  – число полуволн, укладываемых на ширине  $h$ , длине  $l$  и высоте  $b$  резонатора соответственно.

Коэффициент поглощения резонатора определяется как отношение поглощаемой стенками резонатора мощности к подводимой по волноводу СВЧ мощности  $P_D^r / P_I$ . Для заданных положения и размеров отверстия связи

настройка плоского прямоугольного резонатора производится путем подбора его размеров  $h$  и  $l$  так, чтобы коэффициент поглощения резонатора принимал наибольшее значение. Далее осуществляется точная подстройка выбором положения  $\Delta l$  короткозамыкающего поршня (рис. 1). В качестве примера на рис. 2 представлены результаты расчета электромагнитного поля в резонаторе с отверстием связи шириной  $0.8 \cdot a$  и с геометрическим центром, совпадающим с центром стенки  $l$  резонатора.

Видно (рис. 2а), что в настроенном резонаторе с параметрами системы  $h = 51,6$  мм;  $l = 60$  мм,  $\Delta l = 9,8$  мм укладывается, в соответствии с условием резонанса (4), целое число полуволн:  $m = 3$  на ширине  $h$  и  $p = 2$  на длине  $l$  резонатора. В ненастроенном резонаторе (рис. 2б) с параметрами  $h = 53,6$  мм;  $l = 60$  мм,  $\Delta l = 9,8$  мм поле мало по сравнению с полем стоячей волны в волноводе.

**Резонатор с керамическим образцом.** В качестве критерия настройки резонатора с размещенным в нем по центру цилиндрическим керамическим образцом выбирается условие минимальности значения подводимой СВЧ мощности  $P_1$  при фиксированной диссипации СВЧ мощности  $P_D' = 1$  Вт в керамике.

Перенастроить уже настроенную без керамического образца резонаторную систему изменением положения поршня не удалось. Поэтому потребовалось изменить высоту резонатора ( $h = 55,6$  мм) и положение поршня  $\Delta l = -3,5$  мм. Такой резонатор в дальнейшем рассматривается как настроенный. Затем поршень был возвращен в положение, соответ-

ствующее первоначальной настройке резонатора без керамического образца  $\Delta l = 9,8$  мм. Такой резонатор в дальнейшем рассматривается как ненастроенный. Картина распределения электрического поля в настроенном и ненастроенном резонаторах проиллюстрирована на рис. 3.

**Стационарные тепловые состояния керамического образца в резонаторе.** Как и в [3–6] получено, что в стационарном случае из-за относительно большой теплопроводности керамического материала поле температуры в керамике слабо неоднородно, несмотря на заметную неоднородность источников тепловыделения (рис. 4). Поэтому тепловое состояние образца вполне характеризуется максимальным значением  $T_{\max}$  температуры, которая неоднозначно определяется заданием подводимой СВЧ мощности  $P_1$  микроволнового излучения. При задании в качестве внешнего электродинамического параметра задачи диссипируемой в керамике мощности рассчитанная совокупность стационарных состояний в плоскости  $(P_1, T_{\max})$  образует нелинейную зависимость  $T_{\max}(P_1)$ , имеющую характерную S-образную форму (рис. 5). В определенном диапазоне каждому значению СВЧ мощности соответствуют несколько стационарных состояний, образующих последовательность чередующихся между собой устойчивых (на ветвях с  $dT_{\max}/dP_1 > 0$ ) и неустойчивых ( $dT_{\max}/dP_1 < 0$ ) решений. Устойчивость состояний определяется из физических соображений по отношению к флуктуациям температуры.



Рис. 2. Поле модуля напряженности электрического поля в настроенном (а) и ненастроенном (б) резонаторе.



Рис. 3. Поле модуля напряженности электрического поля в настроенном (а) и ненастроенном (б) резонаторе с керамическим образцом.



Рис. 4. Распределение областей тепловыделения в керамическом образце для настроенного (а) и ненастроенного (б) резонатора.

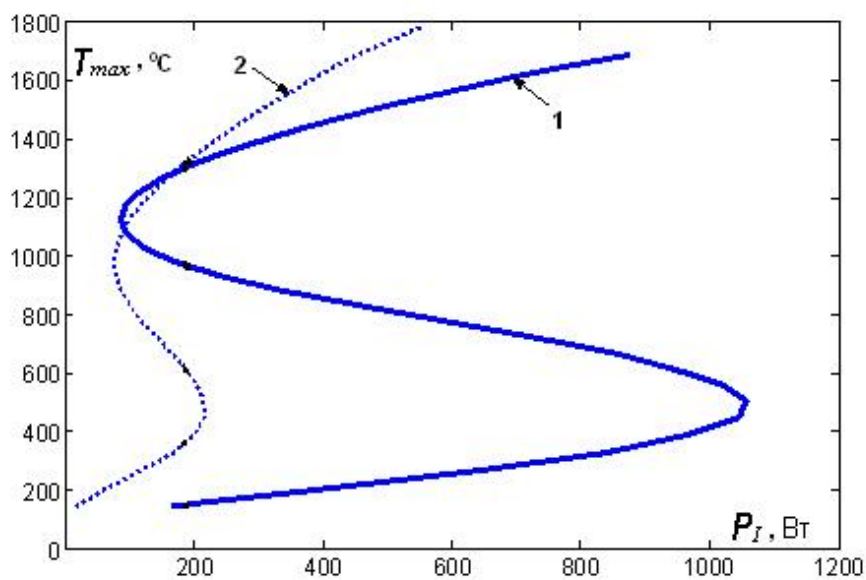


Рис. 5. Зависимость максимальной температуры цилиндрического керамического образца 97%  $Al_2O_3$  от подводимой мощности (1 – ненастроенный резонатор; 2 – настроенный резонатор).

Видно (рис. 5), что параметры резонаторной системы оказывают влияние на зависимость максимальной температуры стационарных состояний от подводимой мощности, но качественный вид кривой в рассмотренных случаях не изменяется. Участок кривой 1 в температурном интервале 450–1150°C и диапазоне подводимой мощности 100–1100 Вт – это неустойчивая относительно температурных флуктуаций ветвь зависимости максимальной температуры от подводимой мощности. Максимальная температура на этом участке не может быть однозначно определена заданием подводимой мощности. С изменением положения поршня  $\Delta l$  (рис. 5 кривая 2) температурные границы неустойчивой ветви изменились незначительно (450–1000°C), а по подводимой мощности верхняя граница диапазона уменьшилась с 1100 до 200 Вт. Наличие неустойчивой ветви рассматриваемой зависимости может приводить к неконтролируемому увеличению температуры в зонах поглощения СВЧ излучения, и значительно усложняет управление микроволновым нагревом керамики.

Проведенный расчет системы микроволнового нагрева, состоящей из прямоугольного резонатора с образцом керамики и подводящего энергию электромагнитного поля волновода с короткозамыкающим поршнем, на основе двумерных уравнений баланса энергии и приведенного волнового уравнения подтверждает результаты, полученные в [4] при решении одномерной задачи нагрева керамического образца в цилиндрическом резонаторе. Вид зависимости максимальной температуры стационарных состояний образца от подводимой мощности имеет характерную S-образную форму. Поле температуры в керамике слабо неоднородно. Области интенсивного тепловыделения имеют размеры близкие к длине волны СВЧ поля в керамическом образце.

В рассмотренной системе микроволнового нагрева вид зависимости максимальной тем-

пературы от подводимой мощности с изменением положения короткозамыкающего поршня качественно не изменяется.

#### Литература

1. *Bykov Yu.V., Rybakov K.I. and Semenov V.E.* High-temperature microwave processing of materials // *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2001. – 34. – P. R55–R75.
2. *Thomas J.J., Skamser D.J., Jennings H.M. and Johnson D.L.* Formation of Reaction-Bonded Silicon Nitride Using Microwave Heating // *J. Am. Cer. Soc.* – 1996. – V.79. – P. 2458–2468.
3. *Kozlov P.V., Rafatov I.R., Kulumbaev E.B. and Lelevkin V.M.* On modeling of microwave heating of a ceramic material// *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2007. – V. 40. – P. 2927–2935.
4. *Kulumbaev E.B., Semenov V.E., Rybakov K.I.* Stability of microwave heating of ceramic materials in a cylindrical cavity// *J. Phys. D: Appl. Phys.* – 2007. – V. 40. – P. 6809–6817.
5. *Кулумбаев Э.Б.* Нагрев керамического цилиндра радиальным микроволновым излучением // *Мат. межд. сем. “Проблемы моделирования и развития технологии получения керамики”*. – Бишкек: МНТЦ, КРСУ, 2005. – С. 31–35.
6. *Кайрыев Н.Ж., Кулумбаев Э.Б., Лелевкин В.М.* Нагрев керамических изделий на волне  $H_{10}$  // *Мат. межд. сем. “Проблемы моделирования и развития технологии получения керамики”*. – Бишкек: МНТЦ, КРСУ, 2005. – С. 36–43.
7. *Вонг Х.* Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров: Справочник. – М.: Атомиздат, 1979. – 216 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
9. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
10. *Лебедев И.В.* Техника и приборы сверхвысоких частот. Т. 1. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 512 с.