

УДК 624.012 (575.2) (04)

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА МНОГОСЛОЙНОЙ БАЛКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

А.Г. Шубович – соискатель,
М.Д. Кутуев – докт. техн. наук, профессор,
Г.М. Садыков – канд. техн. наук, доцент

In clause examples of use a spline – functions for visualization and the analysis of change of a bend of multilayered designs under action of cross-section loading without longitudinal effort, a power method with application of method Ritz are considered.

В настоящее время разработан целый ряд концепций создания многослойных конструкций. Появление технологий производства многослойных конструкций и повышенные требования к их конструктивным и эксплуатационным свойствам требуют разработки новых прикладных методов расчета, отличающихся от классических методик [1]. В ряде современных методик расчета многослойных конструкций основной упор делается на использовании сплайн-функций, позволяющих более точно описать поведение многослойной конструкции. Новые компьютерные технологии только усиливают возможность применения интерполяции в разработке новых методик. Это не единственный пример применения сплайн-функций в научных исследованиях, проводимых в строительной механике. Многие авторы в своих работах используют сплайн-функции для численных расчетов [2, 3].

В данном примере рассматривается использование программного пакета MATLAB [4] для построения сплайн-функций, рассчитывающих прогиб неподвижно закрепленной с двух сторон многослойной балки под действием синусоидальной поперечной нагрузки без

продольного усилия энергетическим методом Ритца [5] (рис. 1).

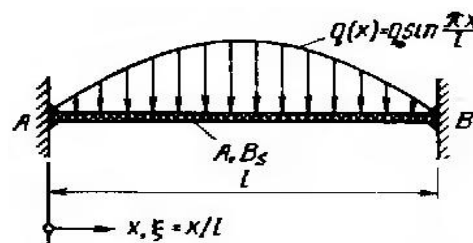


Рис. 1. Жестко закрепленная с двух сторон многослойная балка.

Вследствие симметрии системы и нагрузки относительно середины пролета полный прогиб многослойной балки равен $w = w_B + w_S$, где $w_B = w_M$ и $w_S = w_Q$. Согласно методу Ритца, основанного на минимизации потенциальной энергии [4] и использования отдельных прогибов w_M и w_Q можно минимизировать потенциалы Π_M и Π_Q по отдельности. При минимизации Π_M учитывается, что нагрузка действует посередине балки $x = l/2$, следовательно, для симметричной части изгиба w_M выбирается симметричное выражение ряда:

$$w_M(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot w_{Mj}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \right) \quad (1)$$

Функции сравнения $w_{Mj} = 1 - \cos\left(\frac{2 \cdot j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$

при $(j = 1, 2, 3, \dots)$ выполняют все граничные условия: $w_M(0) = 0$; $w_M(l) = 0$; $w'_M(0) = 0$; $w'_M(l) = 0$.

Подстановка (1) в Π_M , согласно $\Pi_M = W_M + U_M$, и приравнивание к нулю частных производных Π_M по неизвестным постоянным α_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) дает для них следующую систему уравнений:

$$B_S \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left[\alpha_j \int_0^l w''_{Mj} \cdot w''_{Mk} dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Mk} dx = 0 \quad (2)$$

После выполнения математических операций подстановки и интегрирования с использованием метода Рунге над уравнениями (1) и (2) получаем выражение для отдельного изгиба w_M :

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_S} \times \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1/\pi}{j^2 \cdot (4 \cdot j^2 - 1)} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)) \quad (3)$$

где $\xi = \frac{x}{l}$ – безразмерная координата. График изменения отдельного прогиба w_M в зависимости от смещения точки нагрузки от начала многослойной балки к ее концу, построен по результатам (3) (рис. 2) – графики расчетов с

помощью функций MATLAB (рассчитанного (а) – стандартными функциями и (б) – сплайн-функцией).

Выражение для отдельного прогиба w_Q следует из (3) и посредством интегрирования уравнения

$$B_S \cdot w''_Q + A \cdot w'_Q = 0 \quad (4)$$

и с учетом граничных условий $w_Q(0) = w_Q(l) = 0$ имеет следующий вид:

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4/\pi}{4 \cdot j - 1} \cdot (1 - \cos(2 \cdot j \cdot \pi \cdot \xi)) \quad (5)$$

Изменения отдельного прогиба W_Q многослойной балки по всей ее длине и результаты вычисления выражения, описывающего изменение отдельного прогиба (5), были визуализированы с использованием программного пакета MATLAB. Для этого были использованы сплайн-функция, позволяющая визуализировать результаты вычислений, и стандартные функции трехмерной визуализации (рис. 3).

Для получения данных визуализации была сформирована матрица, описывающая поверхность многослойной балки, на которую действует нагрузка. Результаты вычисления значений прогиба были записаны в эту матрицу, рассчитаны и визуализированы в трехмерном пространстве с помощью кубической сплайн-функции. Полный прогиб w получается путем сложения отдельных прогибов $w = w_M + w_Q$ согласно уравнениям (3) и (5).

Результаты визуализации расчетных данных с использованием программного пакета MATLAB показаны на рис. 4, где (б) – график, построенный с использованием кубического сплайна.

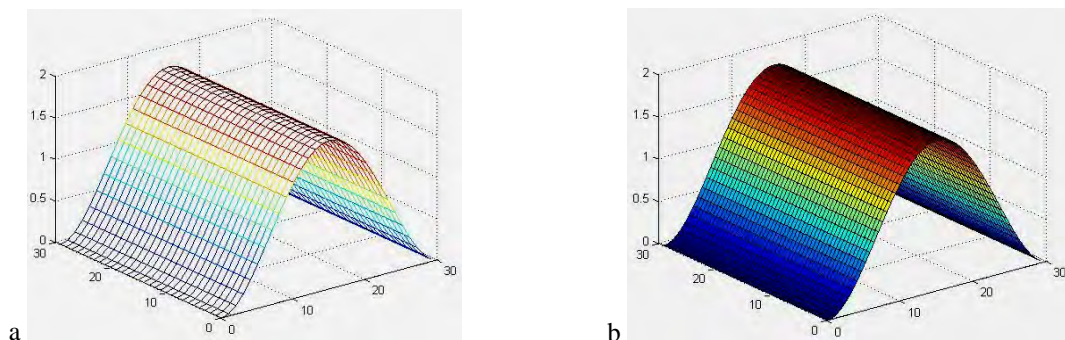


Рис. 2. График изгиба w_M .

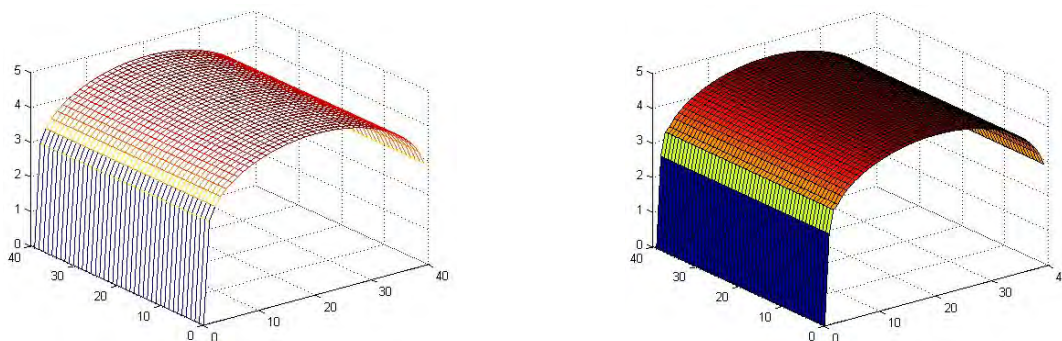


Рис. 3. График изгиба w_Q .

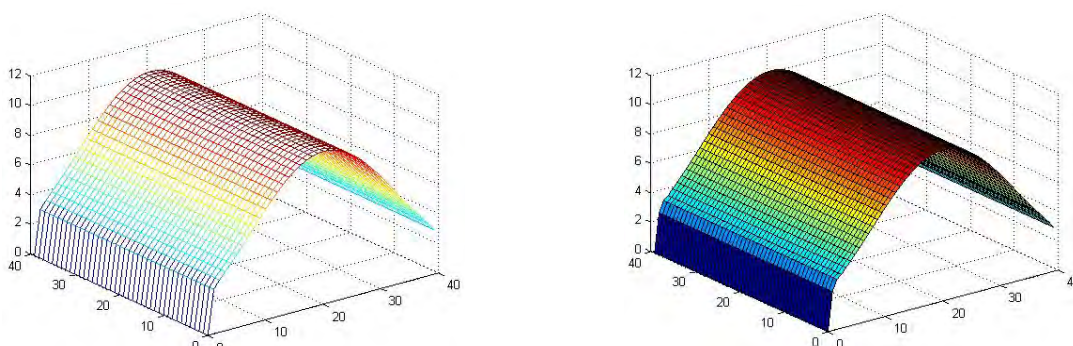


Рис. 4. График изгиба w .

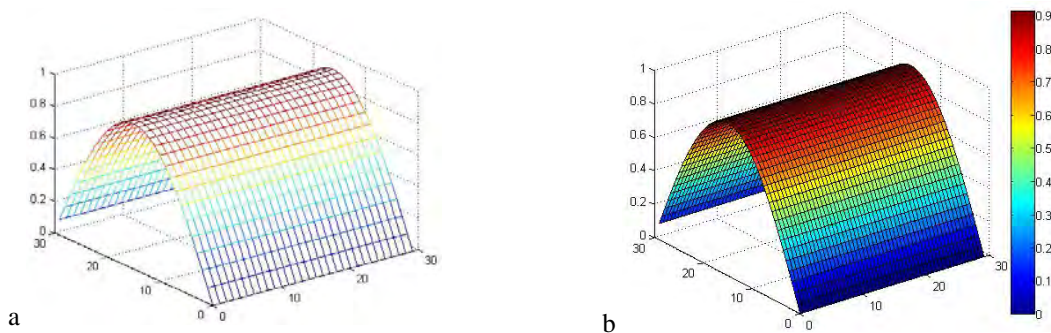


Рис. 5. График изгиба w_Q .

Следующий шаг – минимизирование Π_Q . Для прогиба w_Q выбирается симметричный относительно центра многослойной балки $x = l/2$ ряд:

$$\begin{aligned} w_Q(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cdot w_{Qj}(x) = \\ &= \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} b_j \cdot \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

Функции сравнений $w_{Qj} = \sin\left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{l}\right)$

при $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняют граничные условия $w_Q(0) = 0$ и $w_Q(l) = 0$. Подстановка (6) в Π_Q , согласно $\Pi_Q = W_Q + U_Q$, и приравнивание к нулю частных производных от Π_Q по неизвестным постоянным b_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) дает для них следующую систему уравнений:

$$A \cdot \sum_{j=1,3,\dots}^{\infty} \left[b_j \cdot \int_0^l w'_{Qj} \cdot w'_{Qk} dx \right] - \int_0^l q \cdot w_{Qk} dx = 0$$

В результате преобразования раздельный прогиб w_Q будет равен

$$w_Q = \frac{q_0 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot A} \cdot \sin(\pi \cdot \xi) \quad (7)$$

По расчетам выражения (7) выстраивается график раздельного прогиба w_Q (рис. 5).

Прогиб от изгиба w_M следует из w_Q , согласно (6). При трехразовом интегрировании (4) и граничных условиях $w(0) = w(l) = 0$ и $w'_M(0) = w'_M(l) = 0$ решение имеет вид

$$w_M = \frac{q_0 \cdot l^4}{\pi^4 \cdot B_s} \cdot (\sin(\pi \cdot \xi) + \pi \cdot \xi^2 - \pi \cdot \xi) \quad (8)$$

График изменения прогиба w_M , построенный по расчетным данным выражения (7), по-

лучен при использовании программного пакета MATLAB (рис. 6). Полный прогиб w получается путем суммирования раздельных прогибов w_M и w_Q согласно уравнениям (7) и (8). График вычисления полного прогиба w с использованием кубической сплайн-функции показан на рис. 7. В случае, описанном выше, наиболее приемлемым методом графического представления математической модели изгиба многослойной балки является подход, основанный на использовании сглаживающих кубических сплайн-функций.

Существуют два вида сплайн-функций: интерполяционные сплайны и сглаживающие сплайны. Интерполяционные сплайны целесообразно использовать только в случае, если требуется высокая точность результатов. Применение сглаживающих сплайнов лучше всего подходит при построении математических моделей и анализе изменения механических характеристик, когда не требуется высокая точность результата.

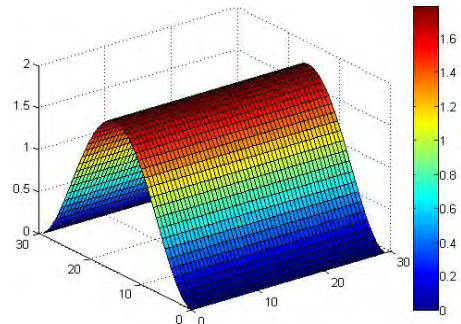
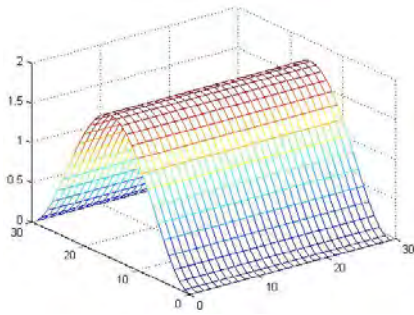


Рис. 6. График изгиба w_M .

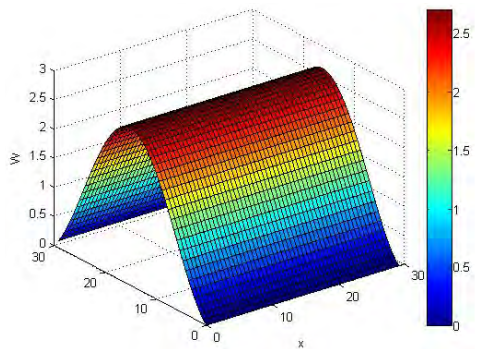
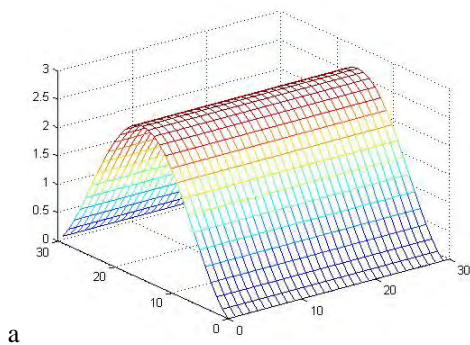


Рис. 7. График изгиба w .

При создании математической модели изгиба многослойной балки, рассчитанной с применением энергетического метода, использовались кубические сплайн – функции, вложенные в программный пакет MATLAB. Визуализация данных, полученных в результате применения кубических сплайн-функций в виде трехмерного изображения, показывает наиболее качественную картину изменения величины прогиба вдоль многослойной балки, а с помощью цветовой палитры, расположенной справа от графика, возможен количественный анализ изменения прогиба.

Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Ешпулатов С.Е. Моделирование оптимальных решений задач строительной механики с использованием новых информационных технологий: Автореф. дисс.... – Бишкек, 2006. – 24 с.
3. Кутуев М.Д., Куканова Р.А. Анализ геометрически нелинейных задач изгиба балок // Известия вузов. – 2006, №3-4. – Бишкек. – С. 3–11.
4. Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. MATLAB 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.
5. Штамм К., Витте Х. Многослойные конструкции. – М.: Стройиздат, 1983. – 300 с.
6. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Новые возможности конструирования многослойных балок // Известия вузов. – 2006. – №5–6. – С. 63–67.
7. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Применение новых информационных технологий в инженерно-строительной практике: Мат. VI межд. научн.-практич. конф. – Томск, 2007. – Ч. 1 – С. 103–106.
8. Кутуев М.Д., Шубович А.Г. Изгиб многослойной балки // Известия вузов. – 2007. – №1–2. – С. 140–145.