УДК 528.235 (575.2) (04)

# ВЫВОД ФОРМУЛ СВЯЗИ ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА И UTM СО СТЕРЕОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИЕЙ ГАУССА

*О.В. Зенин*

Данная проекция и система координат может применяться для практического использования в области изысканий, проектирования и строительства зданий, гидротехнических сооружений, подземных разработок, для туннелей, так как отпадает необходимость перерасчета линейных и угловых измерений из-за кривизны земной поверхности.

*Ключевые слова:* проекция, здание, сооружения, подземные разработки, измерения.

Проекция Меркатора имеет большие линейные искажения и редукции углов на краях зон, что затрудняет ее использование в полной мере для инженерно-геодезических работ в современных условиях. Однако она обладает тем преимуществом, что дает единообразную систему зональных прямоугольных координат. В принципе, любая из точек осевого меридиана каждой зоны может быть принята за начало новой системы в прежней ориентировке. В связи с этим можно всю зону разделить на локальные геодезические системы и тем самым без потери общности достичь упрощения формул решения редукционной задачи новой проекции.

Локальная система координат должна иметь строгую математическую связь с проекцией Меркатора. Для инженерно-геодезических работ Кыргызстана наилучшим образом подходит конформная стереографическая проекция Гаусса с малыми искажениями. Рассмотрим ее не в обычном варианте, а с ориентировкой в трех или шестиградусных зонах, совместив начало координат локальной системы с осевым меридианом. Тогда всякое отображение одной плоскости на другую согласно теоремы конформного преобразования приведет к аналитической функции от комплексных прямоугольных координат. Эту функциональную зависимость выражают формулами:

$$x_r = f(x_m) - \frac{y_m^2}{2} f''(\mathrm{x_m}) + \frac{y_m^4}{24} f^{IV}(x_m) + \cdots;$$

$$y_r = y_m f'(x_m) - \frac{y_m^3}{6} f'''(\mathrm{x_m}) + \frac{y_m^5}{120} f^{V}(x_m) + \cdots. \quad (1)$$

Главным вопросом для решения уравнений (1) является определение основной характеристической функции, которую автор получил в виде выражения:

$$x_{m0} = x_m + \frac{x^3(1+2\eta_0^2)}{12N_0^2} - \frac{t_0\eta_0^2(3+4\eta_0^2)x_m^4}{24N_0^3} + $$

$$+ \frac{x_m^5}{120N_0^4}(1+\eta_0^2+3t_0^2\eta_0^2).$$

Для инженерно-геодезических работ с точностью до $r_0^4$ можно написать:

$$x_{m0} = f(x_m) = x_m + \frac{x_m^3}{12\,M_0^2} - \frac{x_m^4 r_0 r_0^2}{8\,N_0^3} + \frac{x_m^5}{120\,N_0^4}. \quad (2)$$

Вычислив производные от (2) и подставив их (1), получим:

$$x_r = x_m - \frac{x_m y_m^2}{4\,M_0^2} + \frac{x_m^3}{12\,M_0^2} - \frac{t_0 r_0^2}{8\,N_0^3}(x_m^4 - 6x_m^2 y_m^2 + y_m^4); \quad (3)$$

$$y_r = y_m + \frac{x_m^2 y_m}{4\,M_0^2} - \frac{y_m^3}{12\,M_0^2} - \frac{t_0\tau_0^2}{2\,N_0^3}(x_m^3 y_m - x_m * y_m^3).$$

В пределах ширины трехградусной зоны значения координат для исходных пунктов в новой системе координат можно вычислять по более компактным формулам:

$$x_r = x_m - \frac{x_m y_m^2}{4\,M_0^2} + \frac{x_m^3}{12\,M_0^2}; \quad (4)$$

$$y_r = y_m + \frac{x_m^2 y_m}{4\,M_0^2} - \frac{y_m^3}{12\,M_0^2}.$$

Довольно просто теперь можно найти связь дирекционных углов обеих проекций. Для этого в формуле:

$$tg\ \alpha_r = \frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)_r$$

значения координат необходимо заменить из (3) через координаты Меркатора. Выполняя преобразования, получим:

$$\alpha_r = \alpha_m + \frac{x_m y_m}{2M_0^2}\rho'' + \frac{\Delta x \Delta y}{24\,M_0^2}\rho''. \qquad (5)$$

Аналогичным образом можно определить из решения обратной геодезической задачи и длину линии в стереографической проекции. Однако редукционную задачу проекции лучше решить иначе. Для этого в аналитических преобразованиях проекции будем использовать не обычные, а редуцированные масштабы в трех выбранных точках хорды. Обозначим редуцированный масштаб изображения через $m_m^r$ . Он получается из выражения:

$$m_m^r = \frac{m_r}{m_m} = \frac{dS_r}{dS_m} = \frac{dy_r}{dy_m}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{dx_m^2}{dy_m^2}\frac{dy_m^2}{dy_m^2}\right). \qquad (6)$$

Вычислим, продифференцировав (III) по $\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{y}$, редуцированный масштаб и напишем его для точек I, средней $\boldsymbol{m}$ и II хорды.

$$m_m^r = 1 + \frac{x_1^2 - y_1^2}{4M_0^2} + \frac{t_0\tau_0^2}{2N_0^3}\left(3x_1y_1^2 - x_1^3\right);$$

$$m_{m_m}^r = 1 + \frac{x_m^2 - y_m^2}{4M_0^2} + \frac{t_0\tau_0^2}{2N_0^3}\left(3x_my_m^2 - x_m^3\right); \qquad (7)$$

$$m_{m2}^r = 1 + \frac{x_2^2 - y_2^2}{4N_0^2} + \frac{t_0\tau_0^2}{2N_0^2}\left(3x_2y_2^2 - x_2^3\right).$$

После математических преобразований формулы получим:

$$\frac{S_z}{S_g} = \frac{1}{6}(m_1 + 4m_m + m_{m2})W$$

$$S_r = S_m\left(1 + \frac{x_m^2 - y_m^2}{4M_0^2} + \frac{\Delta x^2 - \Delta y^2}{48M_0^2} + \cdots\right)_m \qquad (8)$$

Для инженерно-геодезических работ даже при S=Δx<13, y = 0, км, влияние последнего члена составляет около 1 мм. Общее влияние остальных отброшенных членов при x = y ≤250 км и S ≤ 13км менее 1,5 мм. Поэтому во всех случаях практики инженерно-геодезических работ соотношения между длинами сторон геодезических сетей в проекциях можно выразить формулой:

$$S_r = S_m\left(1 + \frac{x_{mM}^2 - y_{mM}^2}{4M_0^2}\right). \qquad (9)$$

Чтобы перейти от поправки в направление в проекции Гаусса-Крюгера к соответствующей поправке стереографической проекции, воспользуемся той же формулой (7) редуцированного масштаба.

Тогда при конформном преобразовании должно быть:

$$\delta_m^r = -K_1\frac{S}{2} - \left(\frac{dK}{dS}\right)_1 \cdot \frac{S^2}{6},$$

где $K_1 = \dfrac{\partial l_n\, m_r^3}{\partial x_r}\sin\alpha - \dfrac{\partial l_n\, m_r^3}{\partial y_r}\cos\alpha.$

Опуская подробности вычислений, получим:

$$\delta_m^r = -\frac{x_1\Delta y}{4M_0^2} - \frac{y_1\Delta x}{4M_0^2} - \frac{\Delta x\Delta y}{6M_0^2}. \qquad (10)$$

Связь сближений меридианов осуществляется по формуле:

$$\gamma_r = \gamma_m'' - \frac{xy}{2M_0^2}\rho''.\gamma_r = \gamma_m'' - \frac{xy}{2M_0^2}\rho''. \qquad (11)$$

Таким образом, автором установлена простая и точная математическая связь обеих проекций и систем координат.

Для математической обработки в стереографической проекции результатов геодезических измерений, редуцированных на референц-эллипсоид Ф.Н. Красовского совмещенного с международным, можно получить, используя выведенные зависимости, как для вычисления расстояний, так и направлений в следующем виде:

$$\Delta S_m = \Delta S_r + S_r^m. \ \ \Delta S_m = \Delta S_r + S_r^m. \qquad (12)$$

$$\delta_m = \delta_r + \delta_r^m. \qquad (13)$$

Откуда, подставив известные и найденные значения правых частей (12) и (13) найдем:

$$S_r = S_э\left(1 + \frac{x_m^2}{4M_0^2} + \frac{y_m^2}{4N_0^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta x^2}{48M_0^2} + \frac{\Delta y^2}{48N_0^2} + \cdots\right). \qquad (14)$$

$$\delta_r = \rho''\left(-\frac{x_1\,\Delta y}{4M_0^2} + \frac{y_1\,\Delta x}{4N_0^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{8}\frac{l'^2\sin^2 2B_0 x^2\Delta y}{N_0^3} + \frac{l'^2 .\sin^2 2B_0 y\Delta y}{8N_0^3} + \cdots\right). \qquad (15)$$

По формулам (14) и (15) решается редукционная задача проекции в обычном смысле. Причем для инженерно-геодезических сетей достаточно использовать в формулах лишь главные члены, тогда:

$$S_r = S_э\left(1 + \frac{x_m^2}{4M_0^2} + \frac{y_m^2}{4N_0^2}\right). \qquad (16)$$

$$\delta_r'' = \rho''\left(-\frac{x_1\ \Delta y}{4M_0^2} + \frac{y_1\ \Delta x}{4N_0^2}\right). \qquad (17)$$

Анализируя формулы (16) и (17) можно отметить, что аналитически полученная проекция для инженерно-геодезических работ в среднем дает вдвое меньшие искажения, чем проекция Меркатора, которыми в большинстве случаев можно пренебречь.

Учитывая в целом конформность изображения новой проекции, минимальность искажений расстояний и редукции направлений, единообразие систем координат, простую связь с проекцией Меркатора ее можно рекомендовать для инженерно-геодезических работ в СНГ.

Обратную связь можно установить по формулам:

$$x_m = x_r + \frac{x_r\ y_r^2}{4\ M_0^2} - \frac{x_r^3}{12\ M_0^2}; \qquad (18)$$

$$y_m = y_r - \frac{x_r^2 y_r}{4\ M_0^2} + \frac{y_r^3}{12\ M_0^2}$$

$$S_m = S_r\left(1 - \frac{x_r^2 - y_r^2}{4M_0^2}\right). \qquad (19)$$

$$\alpha_m = \alpha_r - \frac{x_m\, y_m}{2M_0^2}\ \rho'' - \frac{\Delta x \Delta y}{24M_0^2}\rho''. \qquad (20)$$

$$\gamma_m = \gamma_r + \frac{xy}{2M_0^2}\ \rho''. \qquad (21)$$

Размеры области применения стереографической проекции Гаусса в разработке автора можно значительно расширить, если применить в ней характер линейных искажений, выполнив проектирование городских и инженерно-геодезических сетей на секущую плоскость.

Если в начале координат проекции Гаусса искажения были равны нулю, то на секущей плоскости в центральной области изображаемой территории можно создать максимально допустимые величины их со знаком минус, которые постепенно переходят в нулевые в зоне сечения, а на краях – в положительные.

Так, если пренебречь искажениями проекции порядка 1:10000, что соответствует относительной погрешности полигонометрии I разряда, то при радиусе сечения:

$$r_c = 2N_0\sqrt{\Delta S : S} =$$

$$= 2N_0\sqrt{1 : 10\ 000} = 128\ km.$$

Полная дуга S, внутри которой можно не учитывать данные искажения, будет равна:

$$S = r_c\sqrt{2} = 128 * 1{,}4 = 180\ km.$$

Это означает, что на площади 100000 км$^2$ в длины сторон полигонометрии 1–2 разрядов не нужно вводить поправки за кривизну геодезических линий. Такое достоинство проекции позволит наилучшим образом решить задачу создания математической основы для обработки инженерно-геодезических сетей на плоскости.

Зададим основную характеристику функцию секущей проекции:

$$x_c = m_0\left(x_r + \frac{x_r^3}{12M_0^2} - \frac{x_r^4\ t_0\tau_0^2}{8N_0^3} + \frac{x_r^5}{120N_0^4}\right).$$

Для иллюстрации этой мысли в таблице приведены значения линейных искажений се-

| Расстояние от начала координат, км | Искажение в расстояниях на 1 км, м | Поправки в расстояниях на 1 км, м | Относительная погрешность |
|---|---|---|---|
| 0 | -0,04 | +0,04 | 1 : 25000 |
| 10 | -0,04 | +0,04 | 1 : 25000 |
| 20 | -0,04 | +0,04 | 1 : 25000 |
| 30 | -0,03 | +0,03 | 1 : 33000 |
| 40 | -0,02 | +0,02 | 1 : 50000 |
| 50 | -0,02 | +0,02 | 1 : 50000 |
| 60 | -0,02 | +0,02 | 1 : 50000 |
| 70 | -0,01 | +0,01 | 1 : 100000 |
| 80 | 0,00 | 0,00 | - |
| 90 | +0,01 | -0,01 | 1 : 100000 |
| 100 | +0,02 | -0,02 | 1 : 50000 |
| 110 | +0,03 | -0,03 | 1 : 33000 |
| 120 | +0,05 | -0,05 | 1 : 20000 |

кущей проекции для инженерно-геодезических маркшейдерских работ в зависимости от их точности. Проектирование выполнено на секущую плоскость для использования осевого меридиана трехградусной зоны.

Из данных таблицы видно, что по всей ширине трехградусной зоны при обработке инженерно-геодезических и маркшейдерских сетей на секущей плоскости стереографической проекции Гаусса искажения таковы, что их не нужно учитывать не только для съемочного обоснования, но и сетей сгущения всех разрядов.

Особенно ценна данная проекция и система координат для практического использования в области изысканий, проектирования и строительства зданий, гидротехнических сооружений, подземных разработок для туннелей, т.к. отпадает необходимость перерасчета линейных и угловых измерений из-за кривизны земной поверхности. Изыскатели и проектировщики получают возможность пользоваться результатами непосредственных измерений, что крайне важно в строительстве, т.к. заведомо устраняются возможные ошибки в исходных данных выносимых зданий и сооружений.

Использование этой проекции принесет ожидаемый экономический эффект, поскольку отпадает необходимость вычислений и введений в результаты измерений редукций расстояний и углов. Безусловно, ее применение при изысканиях и проектировании послужит мощным толчком в развитии проектно-изыскательского производства в нашей стране.

Преобразование с плоскости Гаусса на плоскости секущей проекции выполняется по формуле:

$$x_c = m_0 x_г;$$

$$y_c = m_0 y_г.$$

Развернув значения $x_г, y_г$ по (4), найдем связь координат секущей проекции с координатами ИТМ проекции Меркатора, для которой $m_0=0{,}9996$. Аналогичным образом можно установить связь координат секущей проекции с геодезическими координатами, полученными по GPS и ГЛОНАСС. Весь процесс недовычислений координат можно выполнять с использованием компьютеров.