УДК 517.97 (575.2) (04)

СЛАБООБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К. Керимбеков, Т. Ю. Урывская

Исследовано уравнение теплопередачи с переменными коэффициентами. Введено понятие решения слабообобщенного решения, уравнения теплопередачи с разрывным коэффициентом, являющейся функцией от времени. Разработан алгоритм слабообобщенного решения.

Ключевые слова: слабообобщенное решение; нелинейное интегральное уравнение; дифференциальное неравенство; оптимальное управление.

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый скалярной функцией V(t,x), которая удовлетворяет в области Q=(0,1)x(0,T) уравнению теплопередачи [1]:

$$V_t = V_{xx} + a(t) + g(x)f[t,u(t)], \quad (t,x) \in Q, \quad (1)$$

а на границе Q начальным

$$V(0,x) = \Psi(x), \quad x \in (0,1) \quad (2)$$

и граничным

$$V_x(t,0) = 0, \; V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \quad \alpha > 0, \; t \in (0,T), \quad (3)$$

условиям, $a(t) \in H(0,T)$, $g(x) \in H(0,1)$, $\Psi(x) \in H(0,1)$ – заданные функции, f[t, u(t)] – функция внешнего воздействия, которая нелинейно зависит от функции управления u(t) ∈ ∈ H(0,T), H – гильбертово пространство, T фиксировано.

Решение краевой задачи (1)–(3) ищем в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \; V_n(t) = \int_0^1 V(t,x) z_n(x)dx, \quad (4)$$

где $\{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \; X'(0) = 0, \quad X'(1) + \alpha X(1) = 0, \; \alpha > 0, \quad (5)$$

а $\{\lambda_n\}$ – собственные значения, которые определяются как решение трансцендентного уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$ и обладают следующими свойствами

$$\lambda_n \le \lambda_n + 1, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1), \; n = 0,1,2,3... \quad (6)$$

Определение 1. Любая функция V(t,x) ∈ ∈ H(Q), которая при каждом фиксированном управлении u(t) ∈ H(0,T) удовлетворяет интегральному тождеству

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n^2 t}\Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau] z_n(x), \quad (7)$$

где Ψ_n, g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $\Psi(x)$, $g(x)$, называется слабообобщенным решением краевой задачи (1)–(3).

То, что краевая задача (1)–(3) эквивалентна тождеству (7) проверяется непосредственным вычислением и не представляет труда. Рассмотрим интегральное уравнение (7), переписав его в операторной форме

$$V = K[V] + F[x,u] + h, \quad (8)$$

где

$$K[V] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau z_n(x), \quad (9)$$

$$F[x,u] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n^2 (t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau z_n(x), \quad (10)$$

$$h = h(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n z_n(x). \quad (11)$$

Лемма 1. h является элементом пространства H(0,1).

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T \int_0^1 h^2(t,x)dxdt = \int_0^T \int_0^1 (\sum_{n=1} e^{-\lambda_n^2 t} \Psi_n z_n(x))^2 dxdt =$$

$$\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-2\lambda_n^2 t} \Psi_n^2 dt \le T \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^2 = T \| \Psi(x) \|_H^2 < \infty,$$

где символом $\|\cdot\|_H$ – обозначена норма в пространстве H.

Лемма 2. Оператор K[V], действующий по формуле (9), отображает пространство H(Q) в себя, то есть K: H(Q) → H(Q).

Доказательство. Пусть V(t,x) произвольный элемент пространства H(Q). Утверждение леммы следует из неравенства

$$\int_0^T\int_0^1 K^2[V]dxdt =$$

$$= \int_0^T\int_0^1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}a(\tau)V_n(\tau)d\tau z_n(x)\Big)^2 dxdt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}a(\tau)V_n(\tau)d\tau\Big)^2 \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)}\,|a(\tau)|^2 d\tau\int_0^T V_n(\tau)d\tau dt \le \qquad (12)$$

$$\le T\,\|a(t)\|_H^2 \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T V_n^2(\tau)d\tau =$$

$$= T\,\|a(t)\|_H^2 \|V(t,x)\|_H^2 < \infty.$$

Лемма 3. При выполнении условия

$$\sqrt{T}\,\|a(t)\|_H^2 < 1 \qquad (13)$$

оператор K[V] является сжимающим.

Доказательство. Поскольку оператор K[V] является линейным, то утверждение леммы следует из неравенства (12).

Лемма 4. Пусть при каждом u(t) ∈ H(0,T) функция f[t,u(t) ∈ H(0,T)], т.е. f: H(0,T) → H(0,T). Тогда оператор F[x,u] отображает пространство H(0,T) в себя, т.е. F: H(0,T) → H(0,T).

Доказательство. Пусть u(t) производный элемент пространства H(0,T). Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T\int_0^1 F^2[x,u(t)]dxdt = \int_0^T\int_0^1\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau z_n(x)\Big)^2 dxdt =$$

$$= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau\Big)^2 dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T g_n^2 e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\int_0^T f^2[\tau,u(\tau)]d\tau \le$$

$$\le T^2\,\|g(x)\|_{H(0,1)}^2 \|f[t,u(t)]\|_{H(0,T)}^2 < \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) f: H(0,T)→ H(0,T), т.е. при каждом u(t) ∈ ∈ H(0,T) функция f[t, u(t)] является элементом пространства H(0,T);

2) функция f[t, u(t)] является монотонной функцией относительно функциональной переменной u(t) ∈ H(0,T), т.е.

$$\frac{\partial f[t,u(t)]}{\partial u} \ne 0, \quad t \in (0,T).; \qquad (14)$$

3) для функции a(t) ∈ H(0,T) имеет место неравенство

$$\sqrt{T}\,\|a(t)\|_{H(0,T)} < 1. \qquad (15)$$

Тогда краевая задача (1)–(3) при каждом u(t) ∈ H(0,T) в пространстве H(Q) имеет единственное слабообобщенное решение.

Доказательство. H(Q) является полным линейным нормированным пространством. Утверждение теоремы следует из результатов Лемм 1–4 [2].

Слабообобщенное решение краевой задачи (1)–(4) может быть найдено методом последовательных приближений, по формуле

$$V_n = K_0[V_{n-1}], \qquad (16)$$

где $K_0[V] = K[V] + F[x,u\} + h.$

При этом приближенное решение $V_n(t,x)$ удовлетворяет оценке

$$|V(t,x) - V_n(t,x)\| \le \frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|K_0[V_0] - V_0\|_{H(Q)}, \qquad (17)$$

где V_0 – произвольный элемент пространства H(Q),

$$\gamma = \sqrt{T}\,\|a(t)\|_{H(0,T)}.$$

Заметим, что слабообобщенное решение краевой задачи (1)–(3) также можно построить методом повторных ядер [3]. Согласно представлениям (4) и (7) относительно $V_n(t)$ имеем следующие соотношения:

$$V_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}a(\tau)V_n(\tau)d\tau +$$
$$+\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau,\ n = 1,2,3... \qquad (18)$$

При каждом фиксированном n (18) можно рассматривать как линейные неоднородные интегральные уравнения

$$V_n(t) = \int_0^t K_n(t,\tau)V_n(\tau)d\tau + q_n(t), \qquad (19)$$

где

$$K_n(t,\tau) = e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}a(\tau),$$

$$q_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau. \qquad (20)$$

Решение уравнения (19) находим по формуле

$$V_n(t) = q_n(t) + \int_0^t R_n(t,\tau) q_n(\tau) d\tau, \quad n = 1, 2, 3..., \quad (21)$$

где резольвента $R_n(t,\tau 1)$ определяется соотношениями:

$$R_n(t,\tau,1) = \sum_{i=1}^{\infty} c,$$

$$K_n^i(t,\tau) = \int_\tau^t K_n(t,s) K_n^{i-1}(s,\tau) ds, \quad (22)$$

$$i = 2, 3, 4..., K_n^1(t,\tau) \equiv K_n(t,\tau).$$

Поскольку

1) $$\int_0^T \int_0^T K_n^2(t,\tau) d\tau dt =$$

$$= \int_0^T \int_0^T e^{-2\lambda_n^2(t-\tau)} a^2(\tau) d\tau dt \le Te^{-2\lambda_n^2 T} \| a(t) \|_H^2 < \infty$$

2) $$\int_0^T q_n^2(t) dt \le 2[\int_0^T e^{-2\lambda_n^2 t} \Psi_n^2 dt +$$

$$+ \int_0^T (\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau)^2 dt] \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda_n^2}(1 - e^{-2\lambda_n^2 T})[\Psi_n^2 + Tg_n^2 \| f[t, u(t)] \|_H^2] < \infty,$$

$$n = 1, 2, 3, ...,$$

то ряд (22) сходится почти всюду в квадрате (0,T) x(0,T). Таким образом, интегральное уравнение (19) при каждом фиксированном n = 1, 2, 3, ..., имеет единственное решение:

$$V_n(t) = (e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t R_n(t,\tau,1) e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau) \Psi_n +$$

$$+ \int_0^t (e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \int_s^t R_n(t,\tau,1) e^{-\lambda_n^2(\tau - s)} d\tau) g_n f[s, u(s)] ds. \quad (23)$$

Заметим, что интегральное уравнение (19) и задача Коши

$$V_n'(t) = [-\lambda_n^2 + a(t)] V_n(t) + g_n f[t, u(t)],$$
$$V_0 = \Psi_n, \quad n = 1, 2, 3, ... \quad (24)$$

эквивалентны. Решение задачи Коши (24) находим по формуле:

$$V_n(t) = e^{\int_0^t [-\lambda_n^2 + a(s)] ds} \Psi_n +$$
$$+ \int_0^t e^{\int_\tau^t [-\lambda_n^2 + a(s)] ds} g_n f[\tau, u(\tau)] d\tau, \; n = 1, 2, 3, ... \quad (25)$$

Сравнивая (23) и (25) получим формулу

$$e^{\int_s^t [-\lambda_n^2 + a(\xi)] d\xi} = e^{-\lambda_n^2(t-s)} + \int_s^t R_n(t,\tau,1) e^{-\lambda_n^2(\tau - s)} d\tau, \quad (26)$$

$$n = 1, 2, 3...,$$

которая может оказаться полезной.

Лемма 5. Функция (4), где $V_n(t)$ имеет вид (23), является элементом пространства H(Q).

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства:

$$\int_0^T \int_0^1 V^2(t,x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt \le$$

$$\le 2 \sum_{n=1}^{\infty} [M_0 \Psi_n^2 + TM_0 \| f[t, u(t)] \|_H^2 \; g_n^2] =$$

$$= 2M_0 [\| \Psi(x) \|_H^2 + T \| f[t, u(t)] \|_H^2 \| g(x) \|_H^2] < \infty,$$

где

$$e^{-\lambda_n^2 t} + \int_0^t R_n(t,\tau,1) e^{-\lambda_n^2 \tau} d\tau \le M_0,$$

$$n = 1, 2, 3, ..., t \in (0, T).$$

Литература

1. *Тихонов* А.Н., *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
3. *Краснов* М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.