

УДК 515.12 (575.2) (04)

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУПЕРПАРАКОМПАКТНЫХ ПОЛНЫХ МЕТРИЗУЕМЫХ ПРОСТРАНСТВ

Д.К. Мусаев

Для суперпаракомпактных n -мерных полных метризуемых пространств обобщается теорема Фрейден-
ля для компактов неприводимых стандартных полиэдральных представлений.

Ключевые слова: суперпаракомпактное пространство; полиэдр; триангуляция.

В данной работе под пространством понимается топологическое пространство, под компакта-
ми – метризуемые бикомпакты, под отображением – непрерывное отображение пространств.

Напомним основные для этой работы определения и некоторые необходимые понятия [1–4].

Определение 1 [1]. (а) Звездно-конечное открытое покрытие пространства называется *конечно-
компонентным*, если все его компоненты сцепленности конечны; (б) пространство называется *супер-
паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать конечнокомпонентное по-
крытие; (в) хаусдорфовы суперпаракомпактные пространства называются суперпаракомпактами.

Определение 2 [2]. (а) Конечное покрытие $\omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ пространства X называется неприводи-
мым, если никакой собственной подкомплес N' нерва (см. [2, гл. 3, § 2]) N_ω покрытия ω не являет-
ся нервом покрытия более мелкого, чем ω (т.е. покрытия, вписанного в покрытие ω); б) полный ко-
нечный комплекс K (см. [2, гл. 3, §2]), элементами которого являются дизъюнктные открытые сим-
плексы данного пространства R^n , называется триангуляцией, лежащей в R^n ; (в) отображение f
пространства X в тело триангуляции неприводимо относительно этой триангуляции, если оно суще-
ственно (см. [2, гл. 3, §5]) на прообразе каждого замкнутого симплекса этой триангуляции; (г) ото-
бражение f пространства X в полиэдр \tilde{N} (см. [2, гл. 3, § 2]) называется каноническим по отношению к
покрытию ω , если прообраз $f^{-1}O_{e_i}$ каждой звезды O_{e_i} содержится в O_i .

Определение 3. Конечнокомпонентное покрытие ω пространства X называется неприводимым,
если все его компоненты сцепленности неприводимы (т.е. компоненты ω_λ покрытия ω являются
неприводимыми покрытиями своих тел $\tilde{\omega}_\lambda$).

Определение 4 [2]. Произведением двух систем множеств $\alpha = \{A\}$ и $\beta = \{B\}$ называется систе-
ма множеств $\gamma = \alpha \wedge \beta$, элементами которой являются все (обозначенные) множества вида $A \cap B$, где
 $A \in \alpha, B \in \beta$.

Предложение 1. В любое открытое покрытие суперпаракомпактного хаусдорфова пространства
 X можно вписать неприводимое конечно-компонентное открытое покрытие.

Доказательство. Пусть ω есть произвольное открытое покрытие суперпаракомпактного хаус-
дорфова пространства X . Поскольку пространство X суперпаракомпактно, то, не ограничивая общно-
сти рассуждения, покрытие ω можно считать конечнокомпонентным. Так как каждая компонента
 $\omega_\lambda, \lambda \in L$ покрытия ω конечна, а их тела $\tilde{\omega}_\lambda, \lambda \in L$ открыто-замкнуты в X , то в покрытие ω_λ множе-
ства $\tilde{\omega}_\lambda$ можно вписать (см. [2, предложение 2, гл.4, § 2]) неприводимое открытое покрытие ω_λ^* . То-
гда система $\omega^* = \bigcup \{\omega_\lambda^* : \lambda \in L\}$ является неприводимым конечнокомпонентным открытым покрытием
пространства X , вписанным в ω .

Предложение доказано.

Замечание 1. а) Если $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A, |A| = \tau\}$ есть конечнокомпонентное открытое покрытие пространства X , то тело \widetilde{gN}_ω стандартной геометрической реализации gN_ω в гильбертовом пространстве R^τ нерва N_ω покрытия ω (стандартность реализации означает, что вершины триангуляции gN_ω помещаются в единичные точки пространства R^τ) является дискретной суммой компактных полиэдров $\widetilde{gN}_{\omega_\lambda}$, являющихся телами реализации нервов N_{ω_λ} компонент ω_λ покрытия ω .

Отметим, что полиэдр \widetilde{gN}_ω суперпаракомпактен (см. [3, предложение 2]). Если еще при этом покрытие ω имеет кратность $\leq n+1$, то полиэдры \widetilde{gN}_ω не более чем n -мерны и поэтому $\dim \widetilde{gN}_\omega \leq n$.

б) Из теоремы о канонических отображениях (см. [2, гл. 4, §4, теорема 1]) при переходе к телам компонент конечнокомпонентного покрытия легко вытекает следующее

Предложение 2. Пусть $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A\}$ – произвольное конечно-компонентное открытое покрытие нормального пространства X с нервом N_ω , реализованным в виде триангуляции; можно найти такой подкомплекс N'_ω нерва N_ω и такое каноническое относительно ω отображение $f: X \rightarrow \widetilde{N}'_\omega$, при котором образ fX есть полиэдр $\widetilde{N}'_\omega \subseteq \widetilde{N}_\omega$ и каждый главный симплекс комплекса N'_ω покрыт существенно.

Предложение 3. Для любого конечнокомпонентного неприводимого покрытия $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A, |A| = \tau\}$ нормального пространства X любое каноническое отображение пространства X в тело \widetilde{gN}_ω стандартной геометрической реализации gN_ω в гильбертовом пространстве R^τ нерва N_ω покрытия ω является неприводимым относительно триангуляции gN_ω .

Доказательство. Пусть f есть произвольное каноническое отображение (по отношению к покрытию ω) пространства X в тело \widetilde{gN}_ω стандартной геометрической реализации gN_ω в гильбертовом пространстве R^τ нерва N_ω покрытия $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A, |A| = \tau\}$. Тогда, по замечанию 1, тело \widetilde{gN}_ω стандартной геометрической реализации gN_ω в R^τ нерва N_ω покрытия ω является дискретной суммой компактных полиэдров $\widetilde{gN}_{\omega_\lambda}$, являющихся телами реализации нервов N_{ω_λ} компонент ω_λ покрытия ω . Положим $f_\lambda = f: \widetilde{\omega}_\lambda \rightarrow \widetilde{gN}_{\omega_\lambda}$ для любого $\lambda \in L$. Ясно, что каждое отображение $f_\lambda, \lambda \in L$ является каноническим (по отношению к покрытию ω_λ).

Поскольку покрытие ω неприводимо, то все его компоненты $\omega_\lambda, \lambda \in L$ неприводимы, согласно определению 3, и поэтому каждое каноническое отображение $f_\lambda: \widetilde{\omega}_\lambda \rightarrow \widetilde{gN}_{\omega_\lambda}$ является (см. [2, гл. 4, §1, теорема 1]) неприводимым. Тогда каноническое отображение $f: X \rightarrow \widetilde{gN}_\omega$, как комбинация [4] неприводимых отображений $\{f_\lambda, \lambda \in L\}$, является неприводимым относительно триангуляции gN_ω .

Предложение доказано.

В дальнейшем в этой работе под триангуляцией в гильбертовом пространстве R^τ понимается либо стандартная геометрическая реализация gN_ω нерва N_ω конечнокомпонентного покрытия ω нормального пространства X либо такое его подразделение (см. [2, гл. 3, §, п. 5]) $(gN_\omega)^*$, которое для каждой компоненты ω_λ покрытия ω совпадает с некоторым (многократным, причем кратность зависит от компоненты ω_λ) барицентрическим подразделением (см. [2, гл. 3, §2, п. 6]) триангуляции gN_{ω_λ} .

Замечание 2. а) Пусть $\omega = \{O_\alpha, \alpha \in A, |A| \leq \tau\}$ есть конечнокомпонентное $(n+1)$ -кратное покрытие нормального пространства X , $\tilde{g}\tilde{N}_\omega$ есть тело стандартной геометрической реализации gN_ω в гильбертовом пространстве R^τ нерва N_ω покрытия ω и $\varepsilon > 0$. Возьмем такое натуральное s , что $\left(\frac{n}{n+1}\right)^s \sqrt{2} < \varepsilon$. Тогда в силу изометричности всех k -мерных симплексов триангуляции gN_ω и соотношения $\left(\frac{k}{k+1}\right)^s \sqrt{2} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \sqrt{2}$, $k = 1, 2, \dots, n$, следует, что все симплексы подразделения $(gN_\omega)^*$, являющегося s -кратным барицентрическим подразделением триангуляции gN_{ω_λ} , имеют диаметр $< \varepsilon$.

б) Пусть ω_1 есть конечнокомпонентное открытое покрытие нормального пространства X , gN_{ω_1} есть стандартная геометрическая реализация нерва N_{ω_1} покрытия ω_1 в гильбертовом пространстве R^τ и f_1 есть каноническое относительно покрытия ω_1 отображение пространства X в $\tilde{g}\tilde{N}_{\omega_1}$. Пусть $(gN_{\omega_1})^*$ есть триангуляция полиэдра $\tilde{g}\tilde{N}_{\omega_1}$, являющегося подразделением триангуляции gN_{ω_λ} , и покрытие ω_2' состоит из прообразов при отображении f_1 главных звезд (см. [2, гл. 3, §2, п. 3]) триангуляции $(gN_{\omega_1})^*$. Пусть еще конечнокомпонентное покрытие ω_2 пространства X вписано в покрытие ω_2' , gN_{ω_2} есть стандартная геометрическая реализация нерва N_{ω_2} и f_2 – каноническое относительно ω_2 отображение пространства X в $\tilde{g}\tilde{N}_{\omega_2}$. Тогда любое порожденное вписанностью ω_2 в ω_2' (см. [2, гл. 3, §2, п. 4]) симплициальное относительно триангуляций gN_{ω_2} и $(gN_{\omega_1})^*$ отображение $\pi: \tilde{g}\tilde{N}_{\omega_2} \rightarrow \tilde{g}\tilde{N}_{\omega_1}$ получается, согласно лемме (см. [2, гл. 3, §1]), отображением спуска относительно триангуляции $(gN_{\omega_1})^*$ из отображения f_1 (т.е. носитель любой точки $\pi f_2(x)$ есть грань носителя точки $f_1(x)$ в триангуляции $(gN_{\omega_1})^*$).

Доказательство вытекает из случая компактных полиэдров (см. [2, гл. 3, §1]) переходом к телам компонент покрытия ω_2 .

Теорема 1. Любое n -мерное полное метрическое суперпаракомпактное пространство X является пределом обратной последовательности $S = \{\tilde{K}_i, \pi_i^{i+1}\}$, $i = 1, 2, \dots$ из n -мерных полиэдров \tilde{K}_i , являющихся телами стандартных триангуляций K_i и распадающихся в дискретную сумму компактных полиэдров; при этом проекции π_i^{i+1} симплициальны относительно K_{i+1} и некоторой триангуляции K_i^* полиэдра \tilde{K}_i , являющейся подразделением триангуляции K_i . Каждая проекция $\pi_i: X \rightarrow \tilde{K}_i$ неприводима относительно триангуляции K_i , $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Строим искомую обратную последовательность по индукции. Пусть γ_i , $i = 1, 2, \dots$ есть $\frac{1}{2^i}$ -открытое покрытие пространства X . Так как $\dim X = n$, то существует такое открытое покрытие η пространства X , что всякое вписанное в него покрытие имеет кратность $\geq n+1$. В силу предложения 1, в покрытие $\{\gamma_1 \wedge \eta\}$ впишем неприводимое конечнокомпонентное открытое по-

крытие ω_1 пространства X . Нерв покрытия ω_1 обозначим через N_1 , а через K_1 – стандартную геометрическую реализацию N_1 в гильбертовом пространстве R^r . Согласно предложению 2, существует каноническое относительно ω_1 отображение f_1 пространства X в полиэдр \tilde{K}_1 . Поскольку покрытие ω_1 – неприводимо, то, согласно предложению 3, отображение f_1 является неприводимым относительно триангуляции K_1 отображением и, значит, будет отображением на \tilde{K}_1 . Покрытие ω_1 вписано в покрытие $\{\gamma_1 \Lambda \eta\}$ пространства X , поэтому покрытие ω_1 имеет кратность, равную $n+1$ и $\dim \tilde{K}_1 = n$. В силу конечной компонентности, покрытие ω_1 полиэдра \tilde{K}_1 есть дискретная сумма компактных полиэдров. Рассмотрим покрытие ϕ_1 , состоящее из прообразов главных звезд триангуляции K_1^* при отображении f_1 , где K_1^* – такое подразделение триангуляции K_1 , что его мелкость $< 1/2^2$ (см. пункт (а) замечания 2).

В покрытие $\{\phi_1 \Lambda \eta \Lambda \gamma_2\}$ впишем неприводимое конечнокомпонентное открытое покрытие ω_2 пространства X . Согласно предложению 2, существует каноническое относительно ω_2 отображение f_2 пространства X в полиэдр \tilde{K}_2 , где K_2 есть стандартная геометрическая реализация нерва N_{ω_2} покрытия ω_2 в R^r . По тем же соображениям, что и выше, каноническое относительно ω_2 отображение f_2 пространства X в полиэдр \tilde{K}_2 является неприводимым относительно триангуляции K_2 ; покрытие ω_2 имеет кратность, равную $n+1$; полиэдр \tilde{K}_2 есть дискретная сумма компактных полиэдров и $\dim \tilde{K}_2 = n$. Возьмем какое-нибудь порожденное вписанностью ω_2 в $\{\phi_1 \Lambda \eta \Lambda \gamma_2\}$ симплициальное относительно триангуляций K_2 и K_1^* отображение $\pi_1^2 : \tilde{K}_2 \rightarrow \tilde{K}_1$. Тогда, по пункту (б) замечания 2, отображение $\pi_1^2 f_2$ является спуском отображения f_1 относительно триангуляции K_1^* . Поэтому $d(f_1, \pi_1^2 f_2) < 1/2^2$.

Предположим, что для всех $i < m$ построили: а) n -мерные полиэдры \tilde{K}_i , являющиеся телами стандартных геометрических реализаций в R^r нервов N_{ω_i} неприводимых конечнокомпонентных покрытий ω_i пространства X , вписанные в покрытия $\{\eta \Lambda \gamma_i\}$, $i = 1, 2, \dots$; б) канонические относительно ω_i отображения $f_i : X \rightarrow \tilde{K}_i$, являющиеся неприводимыми отображениями относительно триангуляции K_i ; в) отображения $\pi_{i-1}^i : \tilde{K}_i \rightarrow \tilde{K}_{i-1}$, $2 < i < m$, которые симплициальны относительно триангуляции K_i и некоторой триангуляции K_{i-1}^* полиэдра \tilde{K}_{i-1} , являющейся подразделением триангуляции K_{i-1} ; при этом отображение $\pi_{i-1}^i f_i$ получается из f_{i-1} спуском относительно K_{i-1}^* ; г) отображения $\pi_j^i = \pi_j^{j+1} \dots \pi_{i-1}^j$, π_j^i , $j < i$, удовлетворяют неравенствам $d(\pi_j^{i-1} f_{i-1}, \pi_j^i f_i) < 1/2^i$.

Пусть теперь $i = m$. По замечанию 1, полиэдр \tilde{K}_{m-1} является дискретной суммой компактных полиэдров \tilde{K}_{m-1}^β , $\beta \in L$, являющихся телами стандартных геометрических реализаций K_{m-1}^β в нервах компонент покрытия. У триангуляции существует такое барицентрическое подразделение, что все симплексы триангуляции и их образы в полиэдрах при отображениях, имеют диаметры. Положим совпадающей с $(K_{m-1}^\beta)^{s(\beta)}$ на (\tilde{K}_{m-1}^β) . Ясно, что все симплексы триангуляции $(K_{m-1})^*$ и их образов в поли-

эдрах \tilde{K}_j при отображениях π_j^{m-1} , $j \leq i \leq m-2$, имеют диаметры $< 1/2^m$. В покрытие $\{\phi_{m-1} \wedge \eta \wedge \gamma_m\}$, где ϕ_{m-1} состоит из прообразов главных звезд триангуляции K_{m-1}^* , при отображении f_{m-1} , согласно предложения 1, впишем неприводимое конечнокомпонентное открытое покрытие ω_m пространства X . Существует каноническое относительно ω_m отображение пространства X в полиэдр \tilde{K}_m , где K_m есть стандартная геометрическая реализация нерва N_{ω_m} покрытия ω_m в R^r . Как и ранее, каноническое относительно ω_m отображение f_m пространства X в полиэдр \tilde{K}_m является неприводимым относительно триангуляции K_m (и, значит, будет отображением на \tilde{K}_m); покрытие ω_m имеет кратность, равную $n+1$; полиэдр \tilde{K}_m есть дискретная сумма компактных полиэдров и $\dim \tilde{K}_m = n$. Возьмем какое-нибудь порожденное вписанностью ω_m в $\{\phi_{m-1} \wedge \eta \wedge \gamma_m\}$ симплициальное относительно триангуляций K_m и K_{m-1}^* отображение $\pi_{m-1}^m : \tilde{K}_m \rightarrow \tilde{K}_{m-1}$. Тогда, по пункту (б) замечания 2, отображение $\pi_{m-1}^m f_m$ является спуском отображения f_{m-1} относительно триангуляции K_{m-1}^* . Поэтому

$$d(f_{m-1}, \pi_{m-1}^m f_m) < 1/2^m, \quad d(\pi_j^{m-1} f_{m-1}, \pi_j^m f_m) < 1/2^m, \quad j < m-1. \quad (1)$$

Продолжая построение n -мерных полиэдров \tilde{K}_i и отображений π_{i-1}^i , получим обратную последовательность $\dot{s} = \{\tilde{K}_i, \pi_i^{i+1}\}$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую всем условиям теоремы. Через \tilde{s} обозначим предел обратной последовательности S . Рассмотрим для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$ последовательность отображений

$$f_i, \pi_i^{i+1} f_{i+1}, \pi_i^{i+2} f_{i+2}, \dots \quad (2)$$

пространства X в полиэдр \tilde{K}_i . Доказательство того факта, что все дальнейшие отображения последовательности (2) получаются из f_i спуском относительно триангуляции K_i , аналогично компактному случаю пространства X (см. [2, гл.5, §5, теорема Фрейденталя]). По второму из неравенств (1) имеем

$$d(\pi_i^{m-1} f_{m-1}, \pi_i^m f_m) < 1/2^m.$$

Поэтому для любой точки $x \in X$ последовательность $\{\pi_i^m f_m(x)\}$, $m = i+1, i+2, \dots$, фундаментальна. Поскольку полиэдр \tilde{K}_i полно метризуем, то последовательность $\{\pi_i^m f_m(x)\}$, $m = i+1, \dots$ сходится в некоторой точке $g_i(x) \in \tilde{K}_i$. Последовательность отображений $\{\pi_i^m f_m\}$, $m = i+1, i+2, \dots$ сходится к g_i равномерно, поэтому отображение $g_i : X \rightarrow \tilde{K}_i$ — непрерывно. Поскольку все отображения $\pi_i^m f_m$ получаются из f_i спуском относительно триангуляции K_i , то этим свойством обладает и отображение g_i . Поэтому отображения $g_i : X \rightarrow \tilde{K}_i$, $i = 1, 2, \dots$, являются каноническими отображениями (см. [2, гл.4, §1, лемма 2]) относительно покрытия ω_i .

Кроме того, по предложению 3 отображения $g_i : X \rightarrow \tilde{K}_i$, $i = 1, 2, \dots$, являются неприводимыми отображениями относительно триангуляции K_i (и, значит, будут отображениями на \tilde{K}_i). Проверка соотношения $g_i = \pi_i^j g_j$ при $i < j$ стандартна (см. [2, гл.6, §5]).

Так как каждое отображение g_i является ω_i -отображением пространства X в полиэдр \tilde{K}_i и система открытых покрытий ω_i , $i = 1, 2, \dots$, пространство X измельчается (см. [2, гл.1, §7, опр. 10])

(в силу вписанности покрытия ω_i в γ_i), то предел $g : X \rightarrow \tilde{s} \subseteq \prod_{i=1}^{\infty} \tilde{K}_i$ отображений g_i является

(см. [2, гл. 6, §4, лемма 2]) вложением пространства X в предел \tilde{s} обратной последовательности s . Докажем, что g есть отображение пространства X на предел \tilde{s} обратной последовательности s .

Возьмем какую-нибудь точку $y^0 \in \tilde{s}$ и пусть $y^0 = \{y_i^0, i = 1, 2, \dots\}$. Рассмотрим замкнутые в X множества $\Phi_i = g_i^{-1}y_i^0$, $i = 1, 2, \dots$. Так как g_i есть ω_i -отображение, то $\Phi_i \subseteq 0_{\alpha(i)} \subseteq \omega_i$, $i = 1, 2, \dots$. Докажем, что $\Phi_{i+1} \subseteq \Phi_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Поскольку $y_i^0 = \pi_i^{i+1}y_{i+1}^0$, то $y_{i+1}^0 \subseteq (\pi_i^{i+1})^{-1}y_i^0 (*)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда из включения (*) и равенства $g_i = \pi_i^{i+1}g_{i+1}$ следует, что

$$g_{i+1}^{-1}y_{i+1}^0 = \Phi_{i+1} \subseteq g_{i+1}^{-1}(\pi_i^{i+1})^{-1}y_i^0 = g_i^{-1}y_i^0 = \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Итак, система $\{\Phi_i, i = 1, 2, \dots\}$ замкнутых в X множеств Φ_i , диаметры которых стремятся к нулю, является вложенной. Тогда из полноты пространства X следует, что пересечение множеств Φ_i не пусто и состоит из одной точки. Положим $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Phi_i = \{x^0\}$. Поскольку $g_i\Phi_i = y_i^0$ и $x^0 \in \Phi_i$, то

$g_i(x^0) = y_i^0$, $i = 1, 2, \dots$. Следовательно, $gx^0 = y^0$ и поэтому $y^0 \in gX$. Так как y^0 есть произвольная точка множества \tilde{s} , то отсюда следует, что g есть (топологическое) отображение пространства X на предел \tilde{s} обратной последовательности s .

Заметим, что при отождествлении точек $x \in X$ и $gx \in \tilde{s}$ проекции $\pi_i : \tilde{s} \rightarrow \tilde{K}_i$ отождествляются с неприводимыми относительно триангуляций K_i отображениями g_i .

Теорема доказана.

Следствие 1. Любое n -мерное метрическое суперпаракомпактное пространство X гомеоморфно всюду плотному подмножеству предела \tilde{s} обратной последовательности $s = \{\tilde{K}_i, \pi_i^{i+1}\}$, $i = 1, 2, \dots$, из n -мерных полиэдров \tilde{K}_i , являющихся телами стандартных триангуляций K_i и распадающихся в дискретную сумму компактных полиэдров; при этом проекции π_i^{i+1} симплицальны относительно K_{i+1} и некоторой триангуляции K_i^* полиэдра \tilde{K}_i , являющейся подразделением триангуляции K_i . Каждая проекция $\pi_i : X \rightarrow \tilde{K}_i$ неприводима относительно триангуляции K_i , $i = 1, 2, \dots$.

Литература

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. – М.: Наука, 1973.
2. Мусаев Д.К. Диадические отображения и диадические суперпаракомпактные топологические группы // Сибирский матем. журнал. – 2005. – Т. 46. – № 4. – С. 851–859.
3. Мусаев Д.К. О суперпаракомпактных пространствах // Доклады АН УзССР. – 1983. – № 2. – С. 5–6.
4. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.