УДК 517-524 (575.2) (04)

СУЩЕСТВОВАНИЕ М-ВЫПУКЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В E^n

А. Таскараев, Ж.Р. Абдуллаев

Исследованы вопросы существования выпуклой гиперповерхности специального вида и доказано несколько теорем.

Ключевые слова: гиперплоскость; гиперповерхность с краем; проектирование; кривизна.

Пусть $G \subset E^n \subset E^{n+1}$ замкнутая ограниченная выпуклая область. Через $M(G)$ обозначим класс минимальных гиперповерхностей с краями, которые однозначно проектируются на ∂G, а сама поверхность – в область G. Ясно, что $M(G) = M_0^+ \cup M_0^-$, где $M^+(G)$ подкласс минимальных гиперповерхностей расположенных в полупространстве $Z > 0$, а $M^-(G)$ подкласс минимальных гиперповерхностей расположенных в полупространстве $Z < 0$. Мы рассмотрим один из них, например $M^+(G)$.

Пусть $\Phi \in M^+(G)$ минимальная гиперноверхность и задается уравнением $Z = \varphi(x)$, где $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$.

Пусть $m_\varphi = \inf\limits_{x \in \overline{G}} \varphi(x)$, $M_\varphi = \sup\limits_{x \in \overline{G}} \varphi(x)$

H_{M_φ} – график функции $Z = M_\varphi$ в G. Через T_φ обозначим выпуклые оболочки Φ и H_{M_φ}, т.е. $T_\varphi = C_0(\Phi, H_{M_\varphi})$.

Пусть далее Z_Q – шаровой цилиндр с направляющей Q и образующими параллельными оси Z, где Q – наименьший замкнутый n-мерный шар на гиперплоскости $E^п$, содержащий в себе G.

Через Z_ϕ обозначим часть Z_Q, отсекаемую от него гиперплоскостями $Z = M_\varphi$ и $Z = m_\varphi$.

Очевидно, имеют место включения $\Phi \subset \partial T_\varphi$, $T_\Phi = Z_\Phi$.

Для интегральных кривизн порядка к выпуклой поверхности Φ имеют место формулы Штейнера:

$G(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \omega_k(\Phi, A) h^k$, где $A \subset \Phi$ – борелевское множество, *h=const>0, G(A)* – площадь А.

Тогда, при всех k=0,1,2,…,n

$$\omega_k\left(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi\right) \le \omega_k\left(\partial Z_\Phi, \partial Z_\Phi\right) \tag{1}$$

при всех k=0,1,2,…,n

$$\omega_k\left(\Phi, G\right) \le \omega_k\left(\partial T_\Phi, \partial T_\Phi\right) \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим неравенство

$$\omega_k\left(\Phi,G\right)\le\omega_k\left(\partial Z_Q,\partial Z_Q\right). \tag{3}$$

Из соотношений (1)–(3) для интегральных кривизн различных порядков перенесенных на гиперплоскость E^n, получим равенство:

$$\omega_0\left(\partial Z_\Phi,\partial Z_\Phi\right)=2\mu_n r^n+\nu_{n-1}\left(M_\phi-m_\phi\right)r^{n-1},$$

$$\omega_k\left(\partial Z_\Phi,\partial Z_\Phi\right)=\nu_{n-2}\left[\left(M_\phi-m_\phi\right)r^{n-k+2}+\frac{2d_k\cdot k}{n-k+1}r^{n-k+1}\right], \tag{4}$$

k=1,2,3,…,n-1;

$$\omega_n\left(\partial Z_Q,\partial Z_Q\right)=n\nu_{n-1}d_{n-1},$$

где μ_n – объем единичного п-мерного шара, ν_{n-1} – площадь (n–1) – мерной сферы и

$$d_k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^k\psi d\psi,$$

где *k=1,2,3,…,n.*

Доказательство этого утверждения аналогично как и теоремы 1 ([3]).

В [3] доказано существование обобщенного решения уравнения в функциях множеств имеющих вид:

$$\omega\left(R,\Phi,B\right)=\sum_{k=0}^{n}\mu_k\left(a_k,\Phi,B\right) \tag{5}$$

в классе $\overset{\circ}{K}{}^{+}\left(G\right)$, где $\omega\left(R,\Phi,B\right)$ – условная кривизна выпуклой гиперповерхности Ф, $\mu_K=\mu_K\left(a_k,\Phi,B\right)$ – интегральные условные кривизны порядка k выпуклой гиперповерхности Ф, В – борелевское множество в ограниченной выпуклой области $G\subset E^n$, $a_k=a_k(x,z)>0$ – непрерывные функции в области *G*.

Гиперповерхность называется *m*-выпуклой, если она является границей выпуклой оболочки некоторой минимальной гиперповерхности *Ф*.

Если $\Phi\in M^+(G)$, то через Φ_0 обозначим границу выпуклой оболочки Ф т.е. $\Phi_0=\partial C_0\Phi$. Совокупность таких выпуклых гиперповерхностей обозначим $M_0^+(G)$.

Ясно, что $M_0^+\left(G\right)\subset\overset{\circ}{K}{}^{+}\left(G\right)\subset C\left(G\right)$.

Для $M_0^+\left(G\right)$ выполняются все условия теоремы (3) Отсюда получим следующую теорему.

Теорема 1. Уравнение в функциях множеств (5) имеют хотя бы одно решение в классе $M_0^+\left(G\right)$.

Теперь рассмотрим естественное отображение

$\chi:M_0^+(G)\to M^+\left(G\right)$ т.е. если $\Phi\in M^+(G)$ и $\Phi_0=\partial C_0\Phi$, то $\chi\left(\Phi_0\right)=\Phi$.

Это отображения взаимно-однозначное. Отсюда следует справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует минимальная гиперповерхность из класса $M^+\left(G\right)$, условная кривизна соответствующей m-выпуклой гиперповерхности есть сумма интегральных условных кривизн различных порядков.

Даказательство теоремы следует из теоремы 4 [3].

б) В работах [2] и [3] изучена задача Дирихле для эллиптических уравнений Монжа-Ампера:

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\phi(x,y,z,p,q), \tag{6}$$

где $p = z_x$, $q = z_y$, $\phi(x, y, z, p, q) \geq 0$ и непрерывна в $G \times R \times R^2$, G – выпуклая область с компактным замыканием на плоскости xOy.

И.Я. Бакельман ввел понятие условной кривизны (R-кривизны) выпуклой поверхности $\Phi : z = z(x, y)$, являющейся обобщением внешней кривизны поверхности Ф. По определению R-кривизна есть функция множества

$$\omega(R, z, M) = \iint_{\partial_z(M)} \frac{dpdq}{R(p, q)}, \tag{7}$$

где *R(p,q)>0* – заданная суммируемая функция, $\partial_z(M)$ – нормальное изображение множества M относительно функции *z(x,y)* или относительно поверхности Ф, $M \subset G$ – боролевское множества.

Рассмотрим модель Кэли-Клейна трехмерного пространства Лобачевского Λ^3. Тогда линейный элемент в Λ^3 в бельтрамиевых координатах *x,y,z* имеет вид:

$$ds^2 = \frac{(1 - x^2 - y^2 - z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (xdx - ydy + zdz)^2}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^2}, \tag{8}$$

где $(x, y, z) \in S$, S – открытый шар с центром в точке O евклидова пространства E^3 и радиуса 1.

Фиксируем в круге $D : x^2 + y^2 = 1$ на плоскости $z = 0$ выпуклую область G такую, что расстояние δ в евклидовой метрике E^3 до ∂G положительно.

Как известно, выпуклые тела в Λ^3 в модели Кэли-Клейна изображаются выпуклыми телами в евклидовом шаре *S*. Поэтому все выпуклые поверхности, заданные в Λ^3 явными уравнениями *z=z(x,y)* в области G, таковы, что функция *z(x,y)* выпукла в обычном смысле и наоборот.

Пусть $W^+(G)$ – класс выпуклых поверхностей над областью G, обращенных выпуклостью вверх.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = K(x, y) \frac{(1 + d^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} (1 + \rho^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

где *K(x,y)* – плотность интегральной внешней кривизны, перенесенной на плоскость *x,y*.

$d = \dfrac{|px + qy - z|}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ – значение опорной функции поверхности Ф в точке $(x, y, z(x, y))$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2(x, y)}$.

Теорема. Задача Дирихле для уравнения (9) при краевом условии $z\big|_{\partial G} = 0$ имеет по крайней мере одно обобщенное решение $z_0(x, y) \in W^+(G)$, график которого лежит в S', если:

выпуклая область *S* на плоскости *xoy* лежит в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ и удалена на положительное расстояние от границы этого круга.

∂G таково, что порядок вырождения ее удельной кривизны τ равен нулю и плотность $K(x, y) \leq \Phi(x, y)$, где $\Phi(x, y)$ – суммируемая функция.

Доказательство. (Схема доказательства)

Можно построить нелинейный оператор $A : W^+(G) \to W^+(G)$, переводящий конус $W^+(G) \subset C(G)$ в себя. Оператор *A* вполне непрерывный и не идет назад. Тогда по теореме М.А. Красносельского существует хотя бы одна неподвижная точка оператора А являющаяся обобщенным решением уравнения (6).

Теорема доказана.

Литература

1. *Бакельман И.Я.* Геометрические методы решения эллиптических уравнений. – М., 1965.
2. *Фоменко А.Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. – М., 1987.
3. *Таскараев А.* Выпуклые поверхности и условная кривизна. – Шымкент, 2005.