УДК 515.12 (575.2) (04)

АФФИННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

И.И. Тожиев

Показано, что пространство идемпотентных вероятностных мер топологически вкладывается в пространство полуаддитивных функционалов.

Ключевые слова: идемпотентная мера; полуаддитивный функционал.

Пусть $\boldsymbol{R}$ – поле вещественных чисел. Определим на множестве $\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$ следующие операции: сложение $\oplus$ по правилу $a\oplus b=\max\{a, b\}$, $a,\ b\in\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$, и умножение $\odot$ по правилу $a\odot b=a+b$, $a,\ b\in\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$.

Множество $\boldsymbol{R}\cup\{-\infty\}$, снабженное этими двумя операциями, принято обозначать через $\boldsymbol{R}_{\max}$. Нулем $\mathbf{0}\in\boldsymbol{R}_{\max}$ является $-\infty$, а единицей $\mathbf{1}\in\boldsymbol{R}_{\max}$ является (обычный) ноль: 0. Множество $\boldsymbol{R}_{\max}$ с операциями $\oplus$, $\odot$, нулем $\mathbf{0}=-\infty$ и единицей $\mathbf{1}=0$ является идемпотентным полуполем. Заметим, что переход от полуполя $\boldsymbol{R}_{+}$ относительно обычных операций к $\boldsymbol{R}_{\max}$ осуществляется при помощи естественного преобразования, так называемой деквантизацией Маслова [1].

Рассмотрим произвольный компакт *X*, алгебру $C(X)$ непрерывных функций $\varphi\colon X\to\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}$ можно считать подмножеством полуполя $\boldsymbol{R}_{\max}$. На $C(X)$ можно определить сложение $\oplus$ и умножение $\odot$, соответственно, по правилам:

$(\varphi\oplus\psi)(x)=\max\{\varphi(x),\psi(x)\},\ x\in X$;

$(\varphi\odot\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\ x\in X$,

где $\varphi,\ \psi\in C(X)$. Для $\lambda\in\boldsymbol{R}$ через λ_X обозначают постоянную функцию, тождественно равную λ: $\lambda_X(x)=\lambda$, $x\in X$.

Напомним [2], что функционал $\mu\colon C(X)\to\boldsymbol{R}(\subset\boldsymbol{R}_{\max})$ называется идемпотентной вероятностной мерой на *X*, если он обладает следующими свойствами:

(*a*) $\mu(\lambda_X)=\lambda$ для всех $\lambda\in\boldsymbol{R}$;

(*b*) $\mu(\lambda\odot\varphi)=\lambda\odot\mu(\varphi)$ для всех $\lambda\in\boldsymbol{R}$ и $\varphi\in C(X)$;

(*c*) $\mu(\varphi\oplus\psi)=\mu(\varphi)\oplus\mu(\psi)$ для всех $\varphi,\ \psi\in C(X)$.

Для компакта *X* через $I(X)$ обозначается множество всех идемпотентных вероятностных мерах на *X*. Ясно, что $I(X)\subset\boldsymbol{R}^{C(X)}$. $I(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Относительно этой топологии $I(X)$ является компактом. Операция *I* взятия компакта $I(X)$ из заданного компакта *X* является нормальным функтором в категории компактов. Поэтому можно определить понятие носителя функционала $\mu\in I(X)$:

supp $\mu\bigcap\{A\subset X\colon\overline{A}=A,\mu\in I(A)\}$.

Для компакта *X* введем следующее множество:

$I_\omega(X)=\{\mu\in I(X):|\text{supp}\,\mu|<\aleph_0\}$.

Известно, что $\overline{I_\omega(X)}^{I(X)} = I(X)$. Кроме того, каждая мера $\mu \in I_\omega(X)$ допускает [2] следующее представление

$$\mu = \max\left\{\delta_{x_1} + \lambda_1, ..., \delta_{x_k} + \lambda_k\right\},$$

где supp $\mu = \left\{x_1, ..., x_k\right\}$, $\lambda_i \in \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$, $i = 1, ..., k$, $\max\left\{\lambda_1, ..., \lambda_k\right\} = 0$.

Рассмотрим теперь пространство $P(X)$ положительных, нормированных, линейных функционалов на $C(X)$. Напомним [3], что функционал $\nu : C(X) \to \boldsymbol{R}$ называется:

1) слабо аддитивным, если для всех $c \in \boldsymbol{R}$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;

2) сохраняющим порядок, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \le \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \le \nu(\psi)$;

3)нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;

4) положительно-однородным, если $\nu(\lambda\varphi) = \lambda\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$, где $\boldsymbol{R}_+ = [0, +\infty)$;

5) полуаддитивным, если $\nu(f + g) \le \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Для компакта *X* через $OS(X)$ обозначается множество всех функционалов, обладающими этими пяти свойствами. Элементы множества $OS(X)$ для краткости будем называть полуаддитивными функционалами. $OS(X)$ снабжается топологией поточечной сходимости. Для любого компакта *X* пространство $OS(X)$ является выпуклым компактом.

Теперь для компакта *X* выделим следующее множество

$$P_m(X) = \overline{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \max\{\mu : \mu \in A_i\} : A_i \subset P(X), [A_i]_{P(X)} = A_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \ge 0, i = \overline{1,n}, n \in N\right\}},$$

где положено $\max\{\mu : \mu \in A\}(\varphi) = \max\{\mu(\varphi) : \mu \in A\}, \varphi \in C(X)$.

Предложение 1. Для любого компакта *X* множество $P_m(X)$ является компактом в $\boldsymbol{R}^{C(X)}$.

Предложение 2. Для любого компакта *X* множество $P_m(X)$ является подпространством пространства $OS(X)$.

Пусть $A = \{x_1, ..., x_k\} \subset X$ – произвольное *k*-точечное множество, $A_1 = \{x_2, ..., x_k\}$, $A_2 = \{x_1, x_3, ..., x_k\}$, …, $A_k = \{x_1, ..., x_{k-1}\}$ – $(k-1)$-точечные подмножества *A*. Для каждого $i \in \{1, ..., k\}$ положим:

$$B(A_i) = \left\{\alpha_i \max\{\delta_x : x \in A\} + \sum_{x_j \in A_i} \alpha_{ij}\delta_{x_j} : \alpha_i \ge 0, \alpha_{ij} \ge 0, \alpha_i + \sum_{x_j \in A_i} \alpha_{ij} = 1\right\}.$$

Рассмотрим следующее множество

$$B(A) = \bigcup_{i=1}^{k} B(A_i).$$

Ясно, что $B(A) \subset P_m(X)$.

Теорема 1. Пусть *X* – компакт, $A = \{x_1, ..., x_k\}$ – конечное подмножество компакта *X*. Тогда подпространства $B(A)$ $(\subset P_m(X))$ и $I(A)$ $(\subset I(X))$ гомеоморфны.

Доказательство. Пусть $A = \{x_1, x_2\} \subset X$ – произвольное двухточечное множество, $A_1 = \{x_2\}$, $A_2 = \{x_1\}$ – одноточечные подмножества *A*. Тогда

$$B(A) = \{\alpha\delta_0 + (1 - \alpha)\delta_0 \vee \delta_1 : 0 \le \alpha \le 1\} \cup \{\beta\delta_1 + (1 - \beta)\delta_0 \vee \delta_1 : 0 \le \beta \le 1\}.$$

Для множества $A=\{x_1,x_2\}$ множество идемпотентных вероятностных мер имеет вид

$I(A)=\{\lambda_1\odot\delta_0\oplus 0\odot\delta_1 : -\infty\le\lambda_1\le 0\}\cup\{0\odot\delta_0\oplus\lambda_2\odot\delta_1 : -\infty\le\lambda_2\le 0\}$.

Отображение $f:B(A)\to I(A)$ определим по правилу:

$f(\alpha\delta_0+(1-\alpha)(\delta_0\vee\delta_1))=0\odot\delta_0\oplus\ln(1-\alpha)\odot\delta_1$, $f(\beta\delta_1+(1-\beta)(\delta_0\vee\delta_1))=\ln(1-\beta)\odot\delta_0\oplus 0\odot\delta_1$.

Ясно, что отображение f – гомеоморфизм.

Пусть теперь $A=\{x_1,x_2,x_3\}\subset X$ – произвольное трехточечное множество, $A_1=\{x_2,x_3\}$, $A_2=\{x_1,x_3\}$, $A_3=\{x_1,x_2\}$ – двухточечные подмножества A. Тогда $B(A)=B(A_1)\cup B(A_2)\cup B(A_3)$. С другой стороны, для множества $A=\{x_1,x_2,x_3\}$ множество $I(A)$ идемпотентных вероятностных мер можно записать в виде объединения $D(A_1)\cup D(A_2)\cup D(A_3)$, где

$D(A_1)=\{0\odot\delta_0\oplus\lambda_2\odot\delta_1\oplus\lambda_3\odot\delta_2 : -\infty\le\lambda_2\le 0, -\infty\le\lambda_3\le 0\}$,

$D(A_2)=\{\lambda_1\odot\delta_0\oplus 0\odot\delta_1\oplus\lambda_3\odot\delta_2 : -\infty\le\lambda_1\le 0, -\infty\le\lambda_3\le 0\}$,

$D(A_3)=\{\lambda_1\odot\delta_0\oplus\lambda_2\odot\delta_1\oplus 0\odot\delta_2 : -\infty\le\lambda_1\le 0, -\infty\le\lambda_2\le 0\}$.

Каждому функционалу

$\nu=\lambda_1\mu+\lambda_2(\delta_0\vee\delta_1\vee\delta_2)$,

где $\mu=\alpha_1\delta_0+\alpha_2\delta_1$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\alpha_i\ge 0$, $\lambda_i\ge 0$, $i=1,2$, ставим в соответствие идемпотентную вероятностную меру

$$\ln(1-\lambda_2)\odot\delta_0\oplus\ln\left(1-\frac{\lambda_2\alpha_2}{\alpha_1}\right)\odot\delta_1\oplus 0\odot\delta_2,\ \text{если}\ \alpha_1\ge\frac{1}{2},$$

$$\ln\left(1-\frac{\lambda_2\alpha_1}{\alpha_2}\right)\odot\delta_0\oplus\ln(1-\lambda_2)\odot\delta_1\oplus 0\odot\delta_2,\ \text{если}\ \alpha_2\ge\frac{1}{2}.$$

Это соответствие устанавливает гомеоморфизм между подпространствами $B(A_3)$ и $D(A_3)$. Таким же способом можно установить гомеоморфизм между подпространствами $B(A_1)$ и $D(A_1)$, и $B(A_2)$ и $D(A_2)$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано для двух- и трехточечного множеств. Заключение теоремы аналогично доказывается для произвольного n-точечного множества. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для любого компакта X пространство $OS(X)$ полуаддитивных функционалов содержит подпространство, гомеоморфное пространству $I(X)$.

Доказательство. Возьмем произвольную $\mu\in I_\omega(X)$. Тогда $\mu\in I(\operatorname{supp}\mu)$. Поскольку $|\operatorname{supp}\mu|<\aleph_0$, то в силу теоремы 1 существует единственный функционал $\mu\in B(\operatorname{supp}\mu)$. Следовательно, $I_\omega(X)$ можно вложить в $P_m(X)$. Так как имеет место предложение 1, то $I(X)$ вкладывается в $P_m(X)$. Теперь предложение 2 завершает доказательство следствия 1.

Литература

1. *Маслов В.П.* Методы операторов. – М.: Мир, 1987.
2. *Zarichnyi M.* Idempotent probability measures, I. //arXiv: math.GN/0608754V1.
3. *Давлетов Д.Э.* Некоторые свойства функтора полуаддитивных функционалов // Узбекский матем. журнал. – 2009. – № 4. – С. 50–60.