УДК 517.97 (575.2) (04)

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Т.Ю. Урывская

Исследована задача оптимизации тепловых процессов в случае, когда уравнение содержит разрывный коэффициент, функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления и минимизируется кусочно-линейный функционал. Разработан алгоритм построения ее решения.

Ключевые слова: обобщенное решение; условие оптимальности; знако-определенное решение.

Рассмотрим тепловой процесс V(t, x), описываемый краевой задачей [1, 2]:

$$V_t = V_{xx} + a(t)V + g(x)f[t,u(t)], \quad 0 < x < 1, 0 < t < T,$$

$$V(0,x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1 ,$$

$$V_x(t,0) = 0, \ V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, \alpha > 0, 0 < t \le T \ , \tag{1}$$

где коэффициент $a(t) \in H(0,T)$ является разрывной функцией, $g(x) \in H(0,1), \psi(x) \in H(0,1)$, $f[t,u(t)] \in H(0,T)$ – заданные функции, причем функция внешнего воздействия $f[t,u(t)]$ нелинейно зависит от функции управления $u(t) \in H(0,T)$, H – гильбертово пространство, T – фиксировано.

Используя метод Фурье, формальное решение краевой задачи (1) можно представить в виде

$$V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \tag{2}$$

где $\{z_n(x)\}$ – полная ортонормированная система собственных функций, а $V_n(t)$ определяется как решение линейного интегрального уравнения

$$V_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}\Psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} a(\tau) V_n(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} g_n f[\tau,u(\tau)] d\tau,\ n = 1,2,3... \tag{3}$$

и имеет вид

$$V_n(t) = e^{\int_0^t [-\lambda_n^2 + a(\eta)] d\eta} \Psi_n + \int_0^t e^{\int_s^t [-\lambda_n + a(\eta)] d\eta} g_n f[s,u(s)] ds,$$

где $\{\lambda_n\}$ – соответствующая система собственных значений, удовлетворяющих условиям:

$$\lambda_n \le \lambda_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2}(2n+1), n = 0,1,2,3...,$$

Ψ_n, g_n – коэффициенты Фурье соответственно функций $\Psi(x)$, $g(x)$. Если функция $f[t,u(t)]$ удовлетворяет условию

$$f_u[t,u(t)] \neq 0, \forall\, t \in [0,T], \tag{4}$$

то легко проверить, что каждому управлению $u(t) \in H(0,T)$ соответствует единственное решение краевой задачи (1) $V(t,x)$ и это решение является элементом пространства $H(Q), Q = (0,1)x(0,T)$. Это решение назовем слабо обобщенным решением [3], т.к. оно не является классическим решением.

Далее рассмотрим задачу оптимизации, где на множестве решений краевой задачи (1) при выполнении условия (4), требуется минимизировать функционал

$$I[u,V] = \int_0^1 V(t,x) - \xi(x)]^2 dx + \beta \int_0^T u^2(t) dt, \quad \beta > 0, \tag{5}$$

где $\xi(x) \in H(0,1)$ – заданная функция.

Пара $(u^0(t), V^0(t,x)) \in H(0,T)xH(Q)$, на которой функционал (5) достигает минимального значения, называется оптимально парой. При этом $u^0(t)$ называется оптимальным управлением, $V^0(t,x)$ – оптимальным процессом.

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [4] оптимальное управление $u^0(t)$ находим из соотношений

$$\beta sign u(t) = f_u[t,u(t)] \int_0^1 g(x)\omega(t,x) dx, \tag{6}$$

$$-f_u[t,u(t)](f_u^{-1}[t,u(t)])_u sign u(t) < 0, \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

где $\omega(t,x)$ определяется как решение сопряженной краевой задачи

$$\begin{aligned} &\omega_t + \omega_{xx} + a(t)\omega(t,x) = 0, \quad 0 < x < 1, 0 \le t < T, \\ &\omega(T,x) + 2[V(T,x) - \xi(x)] = 0, \quad 0 < x < 1, \\ &\omega_x(t,0) = 0, \omega_x(t,1) + \alpha\omega(t,1) = 0, \quad 0 \le t < T. \end{aligned} \tag{8}$$

Обобщенное решение краевой задачи (8) находим по формуле

$$\omega(t,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} e^{\int_t^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta}[-h_n + \int_0^T e^{\int_\tau^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta} g_n f[\tau,u(\tau)]d\tau]z_n(x), \tag{9}$$

где $h_n = \xi_n - \Psi_n e^{\int_0^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta}$.

$\xi_n, V_n(t), \omega_n(t)$ – коэффициенты Фурье соответствующих функций. Соотношения (6) и (7) называют условиями оптимальности. Согласно (9) находим, что

$$\int_0^1 g(x)\omega(t,x)dx = -2\sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{\int_t^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta}[-h_n + \int_0^T e^{\int_t^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta} g\ f[\tau,u(\tau)]d\tau].$$

Учитывая монотонность функции $f[t,u(t)]$, т.е. условие (4), условие оптимальности (6) перепишем в виде

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\int_0^T G_n(\tau) f[\tau,u(\tau)]d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)h_n, \tag{10}$$

где $G_n(t) = g_n e^{\int_t^T[-\lambda_n^2+a(\eta)]d\eta}$.

Таким образом, оптимальное управление $u^0(t)$ следует находить как решение нелинейного интегрального уравнения (10), удовлетворяющее дополнительному условию (7). Эта задача по своей постановке является новой в теории интегральных уравнений и обладает специфическими особенностями. Например, нелинейное интегральное уравнение (10) является фредгольмовым и его решение не обладает свойством продолжаемости, т.е. решение строится в целом на отрезке $[0,T]$. Если полагать $u(t) > 0, t \in [0,T]$, то решение интегрального уравнения

$$\beta f_u^{-1}[t,u(t)] + 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\int_0^T G_n(\tau) f[\tau,u(\tau)]d\tau = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)h_n, \tag{11}$$

должен быть только положительного знака и удовлетворять дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)](f_u^{-1}[t,u(t)]_u > 0, \forall\, t \in [0,T]. \tag{12}$$

Если же полагать $u(t) < 0, t \in [0,T]$, то решение интегрального уравнения

$$-\beta f_u^{-1}[t,u(t)] + 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\int_0^T G_n(\tau) f[\tau,u(\tau)]d\tau = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)h_n, \tag{13}$$

должно быть только отрицательного знака и удовлетворять дополнительному условию

$$f_u[t,u(t)](f_u^{-1}[t,u(t)]_u < 0, \forall\, t \in [0,T]. \tag{14}$$

Заметим, что если среди решений положительного знака уравнения (11) не имеется решения, для которого выполняется условие (12), то отсутствует решение задачи (11)–(12). В этом случае задача оптимизации также не имеет решения.

Таким образом, существование оптимального управления тесно связано с вопросом существования решения задачи (11)–(12) (или задачи (13)–(14)). Отметим, что выявление тех условий, при выполнении которых задача (11)–(12) имеет решение, требует дополнительных исследований.

Предположим, что в условиях рассматриваемой задачи оптимизации решение задачи (11)–(12) (или задачи (13)–(14)) существует. Оно может быть найдено методом, разработанным проф. А.А. Керимбековым [5]. Положим

$$\beta signu(t) f_u^{-1}[t,u(t)] = \theta(t). \tag{15}$$

Из условия (7) следует, что соотношение (15) однозначно разрешается относительно u(t), т.е. имеет равенство

$$u(t) = \varphi[t,\theta(t),\beta]. \tag{16}$$

В силу (15) и (16) уравнение перепишем в виде

$$\theta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\int_0^T G_n(\tau)f[\tau,\varphi(\tau,\theta(\tau),\beta)]d\tau=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)h_n, \tag{17}$$

или в операторной форме

$$\theta=K[\theta], \tag{18}$$

где оператор $K[\cdot]$ действует по формуле:

$$K[\theta]=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f[\tau,\varphi(\tau,\theta(\tau),\beta)]d\tau].$$

Можно показать, что оператор $K[\cdot]$ переводит пространство H(0,T) в себя.

Далее, пусть выполняются условия:

(i) функция $f[t,u(t)]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу u(t), т.е.

$$\| f[t,u(t)]-f[t,\bar{u}(t)]\|_H\le f_0\|u(t)-\bar{u}(t)\|_H; \tag{19}$$

(ii) функция $\varphi[t,\theta(t),\beta]$ удовлетворяет условию Липшица по функциональному аргументу $\theta(t)$, т.е.

$$\|\varphi[t,\theta(t),\beta]-\varphi[t,\bar{\theta}(t),\beta]\|_H\le\varphi_0(\beta)\|\theta(t)-\bar{\theta}(t)\|_H. \tag{20}$$

Тогда при выполнении условия

$$\gamma=TM\lambda_0\varphi_0(\beta)\|g(x)\|_H^2<1, \tag{21}$$

где $\lambda_0, M, \varphi_0(\beta)-const$, операторное уравнение (18) в пространстве H(0,T) имеет единственное решение.

Доказательство. H(0,T) – является полным метрическим пространством. При выполнении условий (19)–(21) оператор $K[\theta]$ является сжимающим. Поэтому согласно принципу сжимающих операторов [6, 7] уравнение (18) имеет единственное решение.

Решение уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений [6, 7] по формуле:

$$\theta_n=K[\theta_{n-1}],\quad n=1,2,3,\ldots\ ,$$

где $\theta_0(t)$ – произвольный элемент пространства H(0,T) и при этом приближенное решение $\theta_n(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\bar{\theta}(t)-\theta_n(t)\|_H\le\frac{\gamma^n}{1-\gamma}\|K[\theta_0]-\theta_0\|_{H(0,T)},$$

где $\bar{\theta}(t)$ – точное решение уравнения (18).

Далее $\bar{\theta}(t)$, подставив в (16), решение нелинейного интегрального уравнения (11) находим по формуле:

$$u^0(t)=\varphi[t,\bar{\theta}(t),\beta].$$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
3. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР. Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
5. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132 с.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
7. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.