УДК 517.97 (575.2) (04)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ФАКТОРИЗАЦИИ

С. Б. Доулбекова

Исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации, упругих колебаний в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления, причем её обратная функция является многозначной.

Ключевые слова: метод факторизации; нелинейное интегральное уравнение; дифференциальное неравенство.

О единственности решения краевой задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый функцией $V(t,x)$, которая удовлетворяет в области $Q_T = Q\times[0,T]$ гиперболическому уравнению [1]

$$V_{tt} - AV = g(x)f\left[t,u(t)\right], \qquad x\in Q\subset R^n, \quad 0<t\le T\,, \tag{1}$$

а на границе Q_T начальным

$$V(0,x)=\psi_1(x), \quad V_t(0,x)=\psi_2(x), \quad x\in Q\,, \tag{2}$$

и граничному

$$\varGamma V\left(t,x\right)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x)\cos(\xi,x_i)+a(x)V(t,x)=0, \quad x\in\gamma, 0<t\le T, \tag{3}$$

условиям, где функция $f\left[t,u(t)\right]\in H(0,T)$ описывает изменения внешнего воздействия и нелинейно зависит от функции управления $u(t)\in H(0,T)$; $g(x)\in H(Q)$, $\psi_1(x)\in H_1(Q)$, $\psi_2(x)\in H\,(Q)$ – заданные функции; оператор А действующий по формуле

$$AV\left(t,x\right)\equiv\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_j}(t,x))_{x_i}-c(x\ )V(t,x),$$

является эллиптическим в замкнутой области $\overline{Q}=Q\cup\gamma$ с кусочно-гладкой границей γ, т.е. условия

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)\in H(Q), \quad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j\ge C_0\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2, \quad C_0>0$$

выполняются для любых вещественных чисел $\alpha_1,...,\alpha_n$; $a(x), c(x)$ – ограниченные неотрицательные измеримые функции; ξ – внешняя нормаль к γ в точке $x\in\gamma$; H – гильбертово пространство; H_1 – соболево пространство первого порядка; T – фиксировано.

Функция $V(t,x)\in H(Q_T)$, имеющая обобщенные производные $V_{x_i}(t,x), i=1,...,n,$ называется обобщенным решением краевой задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству [2]

$$\int_Q\left(V_t(t,x)\varPhi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\int_Q\left[V_t\varPhi_t-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)V_{x_j}\varPhi_{x_i}-c(x)V(t,x)\varPhi(t,x)\right]dxdt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\gamma a(x)V(t,x)\varPhi(t,x)dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_Q g(x)f\left[t,u(t)\right]\varPhi(t,x)dxdt$$

почти для всех t_1 и $t_2\left(0\le t_1< t_2\le T\right)$ и для любой функции $\varPhi(t,x)\in H_1(Q_T)$ и в слабом смысле начальному условию (2), т.е. условия

$$\lim_{t\to 0}\int_Q\left[V(t,x)-\psi_1(x)\right]\Phi_0 dx=0\,,\ \lim_{t\to 0}\int_Q\left[V_t(t,x)-\psi_2(x)\right]\Phi_0 dx=0$$

должны выполняться для любой функции $\Phi_0(x)\in H\ (Q\ )$.

Обобщенное решение краевой задачи (1)–(2) при каждом $u(t)\in H(0,T)$ определяется по формуле [2]

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x),\tag{4}$$

где $\psi_{1n},\psi_{2n},\,g_n$ – коэффициенты Фурье соответственно функций $\psi_1(x),\ \psi_2(x),\,u\ g(x);\left\{z_n(x)\right\}$ – полная ортонормированная система собственных функций краевой задачи

$Az(x)=-\lambda z(x),\,x\in Q,\,\Gamma z(x)=0,\quad x\in\gamma,$

а $\left\{\lambda_n\right\}$ – соответствующая последовательность собственных значений, причем $\lambda_n\le\lambda_{n+1}$ и $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Поскольку в общем случае для функции $f\left[t,u(t)\right]$ её обратная функция $f^{-1}\left[t,u(t)\right]$ является многозначной, то между элементами пространства управлений $\left\{u(t)\right\}$ и пространства состояний $\left\{V(t,x)\right\}$ нет взаимно однозначного соответствия, т.е. согласно (4) одно и то же состояние управляемого процесса $V(t,x)$ может быть определено конечным или счетным числом управлений $u(t)$. Это обстоятельство существенно влияет на применение принципа максимума при построении оптимального управления. В этой связи введем понятие “обобщенное управление”. Это позволяет исследовать вопросы разрешимости задачи нелинейной оптимизации на основе принципа максимума.

Определение 1. Обобщенным управлением $U(t)$ назовем класс (конечное или счетное множество) управлений $u(t)\in H(0,T)$ таких, что

$$U(t)=\left\{u_1(t),...,u_m(t)\middle|f\left[t,u_k(t)\right]=h(t),\,\forall u_k(t)\in H(0,T),\,k=1,...,m\le\infty\right\},\tag{5}$$

где $h(t)$ – некоторая функция, определенная на отрезке $\left[0,T\right]$.

Введением “обобщенного управления” вместо пространства управлений $H(0,T)$ можно рассматривать новое пространство $\tilde{H}(0,T)$, элементами которого являются взаимно непересекающиеся классы $U(t)$. Тогда согласно (4), каждое обобщенное управление $U(t)$ определяет единственное обобщенное решение:

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)g_n f\left[\tau,U(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x).\tag{6}$$

Оптимальное обобщенное управление. Рассмотрим следующую задачу нелинейной оптимизации: Среди управлений $u(t)\in H(0,T)$ найти такое управление $u^0(t)\in H(0,T)$, которое вместе с соответствующим ему решением $V^0(t,x)$ краевой задачи (1)–(3) минимизирует нелинейный интегральный критерий качества

$$I\left[u(t)\right]=\int_Q\left\{\left[V(T,x)-\xi_1(x)\right]^2+\left[V_t(T,x)-\xi_2(x)\right]^2\right\}dx+\beta\int_0^T P\left[t,u(t)\right]dt,\,\beta>0\,,\tag{7}$$

где $\xi_1(x),\,\xi_2(x)\in H(Q),\,P\left[t,u(t)\right]$ – заданные функции.

Пусть $u(t)$ некоторый элемент обобщенного управления $U(t)$, а $V(t,x)$ соответствующее ему решение краевой задачи (1)–(3). Непосредственным вычислением можно показать, что для приращения функционала (7) имеет место равенство

$$\Delta I\left[u\right]=I\left[u+\Delta u\right]-I\left[u\right]=-\int_0^T\Delta\Pi\left[t,V(t,x),\omega(t,x),u(t)\right]dt+\int_Q\left\{\Delta V^2(T,x)+\Delta V_t^2(T,x)\right\}dx,$$

где $\quad \Delta\Pi\left[u(t)\right] = \Pi\left[\cdot, u(t)+\Delta u(t)\right] - \Pi\left[\cdot, u(t)\right]$,

$$\Pi\left[t, V(t,x), \omega(t,x), u(t)\right] = \int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx\, f\left[t,u(t)\right] - \beta P\left[t,u(t)\right]. \tag{8}$$

Функция $\omega(t,x)$ как решение сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = 0, \quad x\in Q, \quad 0\le t<T,$$
$$\omega(T,x) + 2\left[V_t(T,x) - \xi_2(x)\right] = 0,$$
$$\omega_t(T,x) - 2\left[V(T,x) - \xi_1(x)\right] = 0, x\in Q,$$
$$\Gamma\omega(t,x) = 0, \quad x\in\gamma, \quad 0\le t<T, \tag{9}$$

определяется по формуле

$$\omega(t,x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} G_n^*(t)\left[h_n - \int\limits_0^T G_n(\tau) f\left[\tau, u(\tau)\right]d\tau\right]\frac{z_n(x)}{g_n}, \tag{10}$$

где

$$G_n(t) = \left\{G_{1n}(t), G_{2n}(t)\right\}, h_n = (h_{1n}, h_{2n})$$
$$G_{1n}(t) = g_n\cos\lambda_n(T-t), \quad G_{2n}(t) = \frac{g_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t)$$
$$h_{1n} = \xi_{2n} - \lambda_n\psi_{1n}\sin\lambda_n T - \psi_{2n}\cos\lambda_n T,$$
$$h_{2n} = \xi_{1n} - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n}\sin\lambda_n T,$$

ξ_{1n}, ξ_{2n} – коэффициенты Фурье соответственно функций $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$.

Согласно (8) принцип максимума [3] позволяет определить подозрительные на “оптимальность” управлений $\left\{\tilde{u}(t)\right\}$ из условий оптимальности

$$\int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx\cdot f_u\left[t,u(t)\right] - \beta P_u\left[t,u(t)\right] = 0, \tag{11}$$

$$\int\limits_Q g(x)\omega(t,x)dx\cdot f_{uu}\left[t,u(t)\right] - \beta P_{uu}\left[t,u(t)\right] < 0. \tag{12}$$

Заметим, что в силу произвольности элемента $u(t)\in U(t)$, условия оптимальности (11)–(12) выполняются для каждого элемента обобщенного управления $U(t)$.

Определение 2. Обобщенное управление (класс) $U^0(t)$, элементы которого удовлетворяют условиям оптимальности (11)–(12) называется оптимальным обобщенным управлением.

Построение оптимального обобщенного управления. При определении элементов оптимального обобщенного управления $U^0(t)$ рассмотрим случаи, когда

$$f_u\left[t,u(t)\right] = 0 \quad \text{и} \quad f_u\left[t,u(t)\right] \ne 0.$$

I. Пусть $\bar{u}_1(t), ..., \bar{u}_k(t)$ элементы класса $U^0(t)$ удовлетворяющее условию

$$f_u\left[t, \bar{u}(t)\right] = 0 \quad \forall t\in\left[0,T\right]. \tag{13}$$

Определение 3. Элементы класса $\bar{U}(t)$, удовлетворяющие условию (13), называются стационарными (особыми) управлениями.

Среди стационарных управлений “оптимальным” может быть лишь, то управление $\bar{u}^0(t)$, которое также должно удовлетворять уравнению

$$P_u\left[t,u(t)\right] = 0$$

и удовлетворяет условию оптимальности (12). Проверка условия (12) согласно (10) сводится к проверке выполнения неравенства

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]\right]f_{uu}\left[t,u(t)\right]+\beta P_{uu}\left[t,u(t)\right]>0$$

и является довольно сложной задачей. Этот случай требует отдельного исследования.

II. В случае, когда

$$f_u\left[t,u(t)\right]\neq 0,\quad \forall t\in\left[0,T\right], \tag{14}$$

существует обратная функция $f^{-1}\left[t,u(t)\right]$. Поэтому условие (11) перепишем в виде

$$\beta P_u\left[t,u(t)\right]f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,u(\tau)\right]d\tau\right]. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что условие оптимальности (12) эквивалентно условию

$$f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]\left(f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]P_u\left[t,u(t)\right]\right)_u>0. \tag{16}$$

Если ввести обозначение

$$\beta P_u\left[t,u(t)\right]f_u^{-1}\left[t,u(t)\right]=v(t),$$

то, согласно (16), существует взаимно однозначное $\left(\forall t\in\left[0,T\right]\right)$ отображение $\varphi:H(0,T)\to H(0,T)$ такое, что

$$u(t)=\varphi\left[t,v(t),\beta\right]. \tag{17}$$

Поэтому равенство (15) перепишем в операторной форме

$$v(t)=G\left[v(t)\right], \tag{18}$$

где

$$G\left[v(t)\right]=2\sum_{n=1}^{\infty}G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,\varphi(\tau,v(\tau),\beta)\right]d\tau\right]. \tag{19}$$

Лемма 1. Пусть функции $f\left[t,\varphi\right]$ и $\varphi\left[t,v(t),\beta\right]$ удовлетворяют условию

$$\left\|f\left[t,\varphi\right]\right\|_H\leq C_0\left\|\varphi\right\|_H,\quad \left\|\varphi\left(t,v(t),\beta\right)\right\|_H\leq C_1\left\|v(t)\right\|_H,\quad C_0,C_1>0, \tag{20}$$

где $\left\|\cdot\right\|_H$ – норма в пространстве H.

Тогда оператор $G\left[\cdot\right]$ отображает пространство $H(0,T)$ в себя.

Доказательство. Используя оценки

$$\left\|G_n(t)\right\|^2=g_n^2\left(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\leq g_n^2\lambda_0,\ \forall t\in\left[0,T\right],1+\frac{1}{\lambda_n}\leq\lambda_0,\ n=1,2,3,...,$$

где $\left\|\cdot\right\|$ – евклидова норма вектора, и соотношение (20) непосредственным вычислением имеем неравенство:

$$\int_0^T G^2\left[v(t)\right]\leq\int_0^T\left(2\sum_{i=1}^{\infty}G_n^*(t)\left[h_n-\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,\varphi(\tau,v(\tau),\beta\right]\right]d\tau\right)^2dt\leq$$

$$\leq 4\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left\|G_n(t)\right\|^2dt\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left\|h_n-\int_0^T G_n(\tau)f\left[\tau,\varphi(\tau,v(\tau),\beta\right]d\tau\right\|^2\leq 8\lambda_0T\left\|g(x)\right\|_H^2\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(1+\lambda_n^2)\psi_{1n}^2+\left(1+\frac{1}{\lambda_n^2}\right)\psi_{2n}^2+\xi_{1n}^2+\xi_{2n}^2\right\}+\lambda_0T\left\|g(x)\right\|_H^2\left\|f\left[t,\varphi\right]\right\|_H^2\right\}=$$

$$=8\lambda_0T\left\|g(x)\right\|_H^2\left\{\left\|\psi_1(x)\right\|_H^2+\lambda_0\left\|\psi_2(x)\right\|_H^2+\left\|\xi_1(x)\right\|_H^2+\left\|\xi_2(x)\right\|_H^2\right\}<\infty$$

из которого, в силу свойств заданных функций, следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть, каждая из функций $f[t,\varphi]$ и $\varphi[t,v(t),\beta]$ удовлетворяет условию Липщица:

$$\left\| f[t,\varphi] - f\left[t,\bar{\varphi}\right]\right\|_H \le f_0 \left\|\varphi - \bar{\varphi}\right\|_H ,$$

$$\left\|\varphi[t,v,\beta] - \varphi\left[t,\bar{v},\beta\right]\right\|_H \le \varphi_0 \left\|v - \bar{v}\right\|_H , \quad f_0, \varphi_0 > 0. \tag{21}$$

Тогда оператор $G[\cdot]$ при выполнении условия

$$2\lambda_0 T \left\|g(x)\right\|_H^2 f_0 \varphi_0 < 1 \tag{22}$$

является сжимающим оператором в пространстве $H(0,T)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из неравенства

$$\left\|G[v] - G[\bar{v}]\right\|_H^2 \le \left(2\lambda_0 T \left\|g(x)\right\|_H^2\right)^2 \left\|f[t,\varphi(t,v(t),\beta)] - f[t,\varphi(t,\bar{v}(t),\beta)]\right\|_H^2 \le$$

$$\le \left(2\lambda_0 T \left\|g(x)\right\|_H^2\right)^2 f_0^2 \left\|\varphi(t,v(t),\beta] - \varphi[t,\bar{v}(t),\beta]\right\|_H^2 \le \left(2\lambda_0 T \left\|g(x)\right\|_H^2 f_0\varphi_0\right)^2 \left\|v(t) - \bar{v}(t)\right\|_H^2 .$$

Теорема. Пусть выполнены условия (20)–(22). Тогда нелинейное интегральное уравнение (18) имеет в пространстве $H(0,T)$ единственное решение.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из леммы 1 и 2 и из того, что $H(0,T)$ является полным метрическим пространством [4].

Решение уравнения (18) может быть найдено методом последовательных приближений [4]

$$v_n(t) = G\left[v_{n-1}(t)\right], \quad n = 1,2,3,...,$$

где $v_0(t)$ произвольный элемент пространства $H(0,T)$. Пусть

$$\bar{v}(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t)$$

решение уравнения (18). Тогда согласно (17) получим “оптимальное” управление

$$\tilde{u}^0(t) = \phi\left[t,\bar{v}(t),\beta\right].$$

Теперь по “оптимальному” управлению $\tilde{u}^0(t)$ можно определить оптимальное обобщенное управление $U^0(t)$, т.е. класс (множество) управлений $\{u(t)\}$, удовлетворяющих уравнению

$$f\left[t,u(t)\right] = f\left[t,\tilde{u}^0(t)\right]. \tag{23}$$

Решение задачи нелинейной оптимизации. Пусть $U^0(t)$ оптимальное обобщенное управление, элементами которого являются управления $\tilde{u}(t)$, удовлетворяющих уравнению (23), т.е.

$$U^0(t) = \left\{\tilde{u}_1(t),...,\tilde{u}_r(t) \middle| f\left[t,\tilde{u}_k(t)\right] = f\left[t,\tilde{u}^0(t)\right], \quad r \le \infty\right\}.$$

На элементах класса $U^0(t)$ функционал (7) имеет вид

$$I\left[\tilde{u}(t)\right] = \int_0^1 \left\{\left[\tilde{V}(T,x) - \xi(x)\right]^2 + \left[\tilde{V}_t(T,x) - \xi_2(x)\right]^2\right\} dx + \beta\int_0^T P\left[t,\tilde{u}(t)\right] dt, \beta > 0 ,$$

где первый интеграл принимает постоянное значение при любом управлении $\tilde{u}(t) \in U^0(t)$, а значение второго интеграла подвергается изменению, когда управление $\tilde{u}(t)$ пробегает множество $U^0(t)$. Поэтому искомое оптимальное управление $u^0(t) \in H(0,T)$ может быть найдено как решение задачи

$$I[u^0(t)] = \min_{\tilde{u}(t)\in U^0(t)} I[\tilde{u}(t)],$$

которая может быть решена с применением того или иного метода оптимизации [5].

Пусть $u^0(t)$ оптимальное управление. Тогда тройка $\left(u^0(t), V^0(t,x), I[u^0(t)]\right)$, где

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_n t}\psi_n+\int_0^t e^{-\lambda_n(t-\tau)}g_n f\left[\tau,u^0(\tau)\right]d\tau\right]z_n(x)$$

– оптимальный процесс,

$$I\left[u^0\right]=\int_Q\left[V^0(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T P\left[t,u^0(t)\right]dt$$

– минимальное значение функционала (7), определяет решение задачи нелинейной оптимизации.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А*. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойства переопределенности системы собственных функций // Изв. АН СССР Серия мат. – 1968. – Т. 32. – №4. – С. 743–755.
3. *Егоров А.И*. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
4. *Люстерник Л.Н., Соболев В.И*. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
5. *Васильев Ф.П*. Численные методы решения экстремальных задач. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. *Лионс Ж.Л*. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
7. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 497 с.
8. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
9. *Бутковский А.Г.* Управление системами с распределенными параметрами (обзор) // Автоматика и телемеханика. – 1979. – №11. – С. 16–65.