УДК 517.946 (575.2) (04)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ АНТИРАНГОМ

Ж.Н. Тасмамбетов, А.Ж. Тасмамбетова

Рассматривается специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, для которых ранг $p \le 0$ и антиранг $m > 0$ Получены необходимые условия существования формальных решений.

Ключевые слова: ранг; антиранг; положительный антиранг; дифференциальное уравнение.

Постановка задачи. В данной работе изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\left.\begin{aligned} &P^{(0)}(x,y)Z_{xx}+P^{(1)}(x,y)Z_y+P^{(2)}(x,y)Z=0,\\ &Q^{(0)}(x,y)Z_{yy}+Q^{(1)}(x,y)Z_x+Q^{(2)}(x,y)\,Z=0\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где коэффициенты $P^{(i)}=P^{(i)}(x,y)$ и $Q^{(i)}=Q^{(i)}(x,y)$ $(i=0,1,2)$ многочлены двух переменных

$$\begin{aligned} &P^{(i)}(x,y)=x^{\pi_i}\cdot y^{\delta_i}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}a_{\mu,\nu}^{(i)}\cdot x^{\mu}y^{\nu}\ ,\\ &Q^{(i)}(x,y)=x^{\gamma_i}\cdot y^{\lambda_i}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}b_{\mu,\nu}^{(i)}\cdot x^{\mu}y^{\nu}\ ,\end{aligned} \tag{2}$$

$(\pi_i,\delta_i,\gamma_i,\lambda_i\ (i=\overline{0,2})$ – целые неотрицательные числа, для которых ранг $p \le 0$ и антиранг $m > 0$.

Частный случай системы (1)–(2) был изучен американским математиком Е. Вильчинским [1]. Он же доказал условия совместности таких систем.

Особые кривые системы определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy}: $P^{(0)}(x,y)\equiv 0, Q^{(0)}(x,y)\equiv 0.$

Нами установлен простой признак определения регулярности и иррегулярности особых кривых [2].

Пусть задана система вида

$$x^2(a_{00}^{(0)}+a_{10}^{(0)}x)Z_{xx}+y(a_{00}^{(1)}+a_{10}^{(1)}x)Z_y+(a_{00}^{(2)}+a_{10}^{(2)}x+a_{01}^{(2)}y+a_{11}^{(2)}xy+a_{20}^{(2)}x^2+a_{02}^{(2)}y^2)Z=0,$$

$$y^2(b_{00}^{(0)}+b_{01}^{(0)}y)Z_{yy}+x(b_{00}^{(1)}+b_{01}^{(1)}y)Z_x+(b_{00}^{(2)}+b_{10}^{(2)}x+b_{01}^{(2)}y+b_{11}^{(2)}xy+b_{20}^{(2)}x^2+b_{02}^{(2)}y^2)Z=0$$

с известными постоянными коэффициентами.

Особые кривые системы:

$$(0,0),(0,\infty),(\infty,0),(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)},0),(0,-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}),(-a_{00}^{(0)}/a_{10}^{(0)},-b_{00}^{(0)}/b_{01}^{(0)}),(\infty,\infty).$$

Если $a_{00}^{(0)}=0$ и $b_{00}^{(0)}=0$, то особенность $(0,0)$ является особой иррегулярной. Когда они отличны от нуля, особенность $(0,0)$ является особой регулярной. В этом случае получим систему с регулярной особенностью. Аналогичным путем устанавливаем, что при $a_{10}^{(0)}\neq 0$ и $b_{01}^{(0)}\neq 0$ для последней системы особенность (∞,∞) будет регулярной, а при $a_{10}^{(0)}=0, b_{10}^{(0)}=0$ – иррегулярной.

В общем случае регулярность и иррегулярность особенностей системы (1) устанавливается с помощью понятия ранга и антиранга. Для таких систем одновременно можно говорить и о ранге $p = k + 1$ и антиранге $m = -1 - \chi$ системы, то есть можно определить как величину подранга k

$$k = \max \frac{\tau_l - \tau_0}{l} \quad (l = 1,2), \tag{3}$$

так и величину антиподранга χ

$$\chi = \min \frac{\tau_i - \tau_0}{j} \quad (j = 1,2), \tag{4}$$

где τ_l и τ_j совпадает с одним из чисел $\pi_i, \delta_i, \gamma_i, \lambda_i$ $(i = \overline{0,2})$.

Подранг k и антиподранг χ системы (1) определяются по независимым переменным x и y отдельно. Когда определяются подранги k_t $(t = 1,2)$, то выбирается наибольшее из них за подранг системы. Наоборот, когда определяются антиподранги коэффициентов χ_t $(t = 1,2)$, за антиподранг системы выбирается наименьшее из них.

Используя понятия ранга и антиранга, можно доказать ряд теорем.

Теорема 1. Система (1) имеет регулярные решения в виде рядов двух переменных

$$Z_i(x,y) = x^{\rho_i} y^{\sigma_i} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu}^{(i)} x^{\mu} y^{\nu} \quad (C_{0,0}^{(i)} \neq 0), \tag{5}$$

где $(\rho_i, \sigma_i, C_{\mu,\nu}^{(i)}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,...; i = 1,2,3,4)$ – неизвестные постоянные), сходящиеся вблизи особенности $(x = 0,\ y = 0)$ в том и только в том случае, когда антиранги системы m_s $(s = 1,2)$ равны нулю.

Доказательство теоремы аналогично [3].

Следствие. Для того чтобы система (1) имела четыре регулярных решения $Z_j(x,y)$ $(j = 1,2,3,4)$ вблизи особенности $(x = 0,\ y = 0)$ необходимо и достаточно, чтобы антиподранги системы $\chi_s \geq -1$ $(s = 1,2)$.

Согласно общей теории [1] систем вида (1), она может иметь до четырех линейно-независимых частных решений.

Если $x = 0$ является особой регулярной кривой системы, то выполняется неравенство вида

$$\pi_0 \leq \pi_s + s \quad (1 \leq s \leq 2). \tag{6}$$

Если хотя бы при одном значении s выполняется неравенство

$$\pi_0 > \pi_s + s \quad (1 \leq s \leq 2),$$

то $x = 0$ является особой иррегулярной.

Из (6) следует, что для регулярной особой точки

$$\pi_s - \pi_0 + s \geq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\pi_s - \pi_0}{s} \geq -1 \quad (1 \leq s \leq 2).$$

Отсюда вытекает, что если $x = 0$ – особая регулярная кривая, то число $m_s \leq 0$, а когда особая кривая $x = 0$ – иррегулярная, число $m_s > 0$.

Такие же условия должны выполняться и относительно переменной y.

Случай положительного ранга. Пусть антиранг системы $m_s > 0$ $(s = 1,2)$, где $m_1 -$ антиранг системы относительно независимой переменной x, а $m_2 -$ относительно независимой переменной y.

Это означает, что особые линии $x = 0$ и $y = 0$ – особые иррегулярные и существует формальное решение вида

$$Z_j(x,y) = \exp Q_j\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \cdot x^{\rho_j} \cdot y^{\sigma_j} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} B_{\mu,\nu}^{(j)} \cdot x^{\mu} y^{\nu} \quad (B_{0,0}^{(j)} \neq 0), \tag{7}$$

где $\rho_i, \sigma_i, B_{\mu,\nu}^{(j)}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,...; j = 1,2,3,4)$ – неизвестные постоянные, которые следует определить; многочлен $Q_j(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ – многочлен двух переменных

$$Q_i(\frac{1}{x},\frac{1}{y}) = \frac{\alpha_{m0}}{mx^p} + \frac{\alpha_{0m}}{my^p} + ... + \frac{\alpha_{11}}{xy} + \frac{\alpha_{01}}{y} + \frac{\alpha_{10}}{x} \tag{8}$$

с неизвестными коэффициентами $\alpha_{m0}, \alpha_{0m}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}$ и α_{10}.

В этом случае для построения решения вида (7) воспользуемся основным преобразованием

$$Z(x,y) = \exp Q(\frac{1}{x},\frac{1}{y}) \cdot U(x,y), \tag{9}$$

где неизвестные коэффициенты $\alpha_{m0}, \alpha_{0m}, ..., \alpha_{11}, \alpha_{01}$ и α_{10} многочлена (8) определяются из вспомогательной системы относительно неизвестной $U(x,y)$. Они определяются приравниваем к нулю m_s $(s = 1,2)$ коэффициентов

$$b_{m0}^{(j)} = 0,\ b_{0m}^{(j)} = 0,\ b_{m-1,0}^{(j)} = 0, ..., b_{10}^{(j)} = 0, b_{00}^{(j)} = 0 \quad (j = 1,2) \tag{10}$$

при наинизших степенях независимых переменных x и y при $U(x,y)$.

Каждое из них определяет систему, состоящую из двух уравнений.

Тогда первое необходимое условие существования формального решения вида (7) формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 2. Для того чтобы вспомогательная система, полученная с помощью преобразования (9) из системы (1), имела хотя бы одно решение вида (7), необходимо, чтобы имели место равенства (10).

Второе необходимое условие связано с построением решения вида (5), где неопределенные постоянные ρ и σ находятся из системы определяющих уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) = a_{00}^{(0)}\rho(\rho-1) + a_{00}^{(1)}\rho + a_{00}^{(2)}\sigma + a_{00}^{(3)} = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) = b_{00}^{(0)}\sigma(\sigma-1) + b_{00}^{(1)}\rho + b_{00}^{(2)}\sigma + b_{00}^{(3)} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а неизвестные коэффициенты $C_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,...)$ находятся из системы рекуррентных последовательностей:

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{\mu-m,\nu-n} f_{m,n}^{(j)}(\rho+\mu-m, \sigma+\nu-n) = 0,\ (m,n = 0,1,2,...; \mu,\nu = 0,1,2,...)\,. \tag{12}$$

Приведем формулировку второго необходимого условия.

Теорема 3. Для того чтобы вспомогательная система имела решения вида (7), необходимо, чтобы пара (ρ,σ) была корнем системы определяющих уравнений вида (11), где $f_{00}^{(j)}(\rho,\sigma), (j = 1,2)$ есть коэффициенты при наименьших степенях системы характеристических функций, полученных из вспомогательной системы путем подстановки вместо неизвестной $Z(x,y) = x^\rho y^\sigma$.

Выполнение приведенных выше двух необходимых условий приведет к справедливости следующего утверждения:

Теорема 4. Если системы характеристических уравнений имеют только простые пары корней, то система (1) при положительном антиранге $m_s > 0$ $(s = 1,2)$ и ранге $p \le 0$ допускает четыре формальных решения вида (7).

Если системы характеристических уравнений имеют кратные корни, то система (1) имеет так называемые **поднормальные** решения. Этот случай до сих пор остается не исследованным.

Литература

1. *Wilczynski E.J.* Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces. – Leipzig: Feubner, 1906. – 120 p.

2. *Тасмамбетов Ж.Н.* Нормальные решения специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с полиномиальными коэффициентами: Автореф. дис… докт. физ.-мат. наук. – Алматы, 2004. – 41 с.
3. *Тасмамбетова А.Ж., Тасмамбетов Ж.Н.* Решение систем дифференциальных уравнений в частных производных с положительным антирангом // Вестник КазГУ. Сер. матем., механика, информатика. Спец. выпуск. – 2008. – №3. – С. 237–244.