УДК 519:3.62 – 50 (575.2) (04)

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Т.П. Самохвалова, Т.Т. Якиманская

Численно решена система вспомогательных уравнений с двумя переменными в задаче оптимального управления. Исследованы свойства решений на интервалах стационарности.

Ключевые слова: частные производные; оптимальное управление; система Риккати; конечноразностная аппроксимация.

Введение. При оптимизации режимов нагрева различных материалов широко используется математическая теория оптимального управления [1–2]. При построении алгоритмов оптимального управления по принципу обратной связи (синтезирующее управление) необходимо решать вспомогательную систему нелинейных уравнений типа Риккати. К настоящему времени для задач, в которых математическими моделями процессов являются уравнения в частных производных, получены различные системы типа Риккати [2–3, 5]. Исследователей интересуют интервалы стационарности решений этих систем, так как по ним строятся алгоритмы управления с более простой технической реализацией [1].

В [5] рассматривалась система Риккати с двумя независимыми переменными в прямоугольной системе координат с нелинейностью в граничном условии, для этого случая выявлено наличие интервалов стационарности решений. В расчетах использовались квазилинеаризация, конечноразностная аппроксимация и метод прогонки [4]. Квазилинеаризация обеспечивала единственность предела последовательности приближений решения краевой задачи.

В данной работе продолжено исследование свойств решений вспомогательной системы уравнений в частных производных.

Постановка задачи [5]**.** Пусть состояние управляемого процесса определяется функцией $u(t,x)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x) \tag{1}$$

с начальным и граничными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0, \quad \lambda\frac{\partial u(t,1)}{\partial x} = \alpha_0[p(t) - u(t,1)], \tag{2}$$

где функция $u(t,x)$ характеризует температуру однородного тонкого стержня в точке "*x*" в момент времени *t*, постоянные a, λ, α_0 и функции $f(t,x), u_0(x)$ заданы, $p(t)-$ допустимое управление.

Задача 1 *(задача оптимального управления).* Найти синтезирующее управление $p(t,u(t,x))$ и соответствующее ему обобщенное решение $u(t,x)$ уравнения (1) с условиями (2), доставляющие минимальное значение функционалу

$$J_3 = \gamma_1\int_0^T\int_0^1\left[u(t,x) - g\right]^2 dxdt + \gamma_2\int_0^1\left[u(T,x) - g\right]^2 dx + \xi_1\int_0^T\left[u(t,1) - g\right]^2 dt + \beta\int_0^T p^2(t)\,dt, \tag{3}$$

где постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \xi_1 \ge 0, \beta > 0, g$ – заданы.

Решение задачи 1. Следуя [2], получим оптимальное управление

$$p^0(t) = -\frac{a\alpha_0}{2\lambda\beta}v(t,1), \tag{4}$$

где $v(t,x)$ является функциональной производной от соответствующего функционала Беллмана $S(t,u)$, который удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial S(t,u)}{\partial t} = \gamma_1\int_0^1\left[u(t,x) - g\right]^2 dx + \xi_1\left[u(t,1) - g\right]^2 - \frac{a\alpha_0}{\lambda}u(t,1)v(t,1) -$$

$$-au(t,1)\frac{\partial v(t,1)}{\partial x} + au(t,0)\frac{\partial v(t,0)}{\partial x} + a\int_0^1 u(t,x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,dx + \int_0^1 f(t,x)v(t,x)\,dx - \frac{a^2\alpha_0^2}{4\lambda^2\beta}v^2(t,1) \tag{5}$$

с условием

$$S(T,u) = \gamma_2\int_0^1\left[u(T,x) - g\right]^2 dx.$$

Решение уравнения Беллмана (5) будем искать в виде формы [5]:

$$S(t,u) = \int_0^1 k(t,x)u^2(t,x)\,dx + \int_0^1 \varphi(t,x)u(t,x)\,dx + \eta(t). \tag{6}$$

Из (6) получаем, что функциональная производная по *u* от $S(t,u(t,x))$ равна $v(t,x) = 2k(t,x)u(t,x) + \varphi(t,x)$, оптимальное управление (4) имеет вид:

$$p^0(t) = -\frac{a\alpha_0}{2\lambda\beta}\left\{2k(t,1)u(t,1) + \varphi(t,1)\right\}. \tag{7}$$

Вспомогательные функции $k(t,x)$, $\varphi(t,x)$ в (6) определяются из системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$-\frac{\partial k(t,x)}{\partial t} = 2a\frac{\partial^2 k(t,x)}{\partial x^2} + \gamma_1, \tag{8}$$

$$k(T,x)=\gamma_2\,,\quad \frac{\partial k(t,0)}{\partial x}=0\,,\quad -2a\frac{\partial k(t,1)}{\partial x}-\frac{a^2\alpha_0^2}{\lambda^2\beta}k^2(t,1)-\frac{2a\alpha_0}{\lambda}k(t,1)+\xi_1=0\,; \tag{9}$$

$$-\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=a\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}+2f(t,x)k(t,x)-2\gamma_1 g\,, \tag{10}$$

$$\varphi(T,x)=-2\gamma_2 g\,,\quad \frac{\partial\varphi(t,0)}{\partial x}=0\,,\ -a\frac{\partial\varphi(t,1)}{\partial x}-\frac{a^2\alpha_0^2}{\lambda^2\beta}k(t,1)\varphi(t,1)-\frac{a\alpha_0}{\lambda}\varphi(t,1)-2\xi_1 g=0\,. \tag{11}$$

Задача 2. Решить систему вспомогательных уравнений (8)–(11) и исследовать свойства функций $k(t,x),\varphi(t,x)$ при $g=konst$.

Решение задачи 2. В данной работе в отличие от [5] для решения (8)–(9) не используется квазилинеаризация. На этапе определения из (9) граничного значения u^n_{m+1} в методе прогонки получено квадратное алгебраическое уравнение. Предложено решать его на каждом слое t^n, используя в формуле решения только один знак – плюс или минус, исключая “ветвление” решения. Получено решение в виде сеточных функций k_i^n,φ_i^n, близкое к [5].

По алгоритму (7) рассчитана температура объекта (1)–(2) (рис. 1). Графики показывают, что расчетная температура попадает в заданную зону, но затем уходит из нее, возможно, из-за погрешностей вычислений.

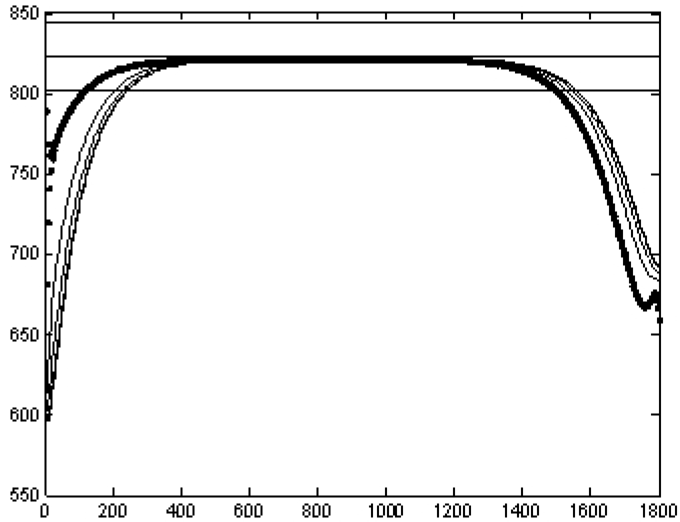

Рис. 1. Температура при управлении (7).

Исследование свойств k_i^n,φ_i^n. Расчеты показывают, что сеточные функции k_i^n,φ_i^n имеют интервалы стационарных значений по *n* при фиксированных *i*. Следуя идее [1], по стационарным значениям $\bar{k},\bar{\varphi}$ построим алгоритм управления

$$\bar{p}(t)=-\frac{a\alpha_6}{2\alpha_4\beta}\left\{2\bar{k}u(t,1)+\bar{\varphi}\right\} \tag{12}$$

и выясним возможность его применения для целей управления (3). Возьмем $\bar{k}=k_{m1}^{nn/2};\bar{\varphi}=\varphi_{m1}^{nn/2}$ (в середине интервала $[0,T]$). Показано, что алгоритм (12) переводит температуру (1)–(2) в заданную зону (рис. 2).

Численные расчеты выполнены при следующих значениях параметров:

$n = 960; m = 10; t_0 = 0; T = 1800 sek; x_0 = 0; x1 = 4 sm; \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 0; \xi_1 = 0; \beta = 0.065;$

$a = 0.09; \lambda = 0.4428; \alpha_0 = 0.0244; u_0(x) = 598^0 K; g = 823^0 K$.

Расчеты показывают, что стационарность сеточных функций k_i^n, φ_i^n является визуальной, так как коэффициент $\overline{k}$ зависит от выбора номера точки t^n, и полученная здесь разность порядка 10^{-3} не является малой.

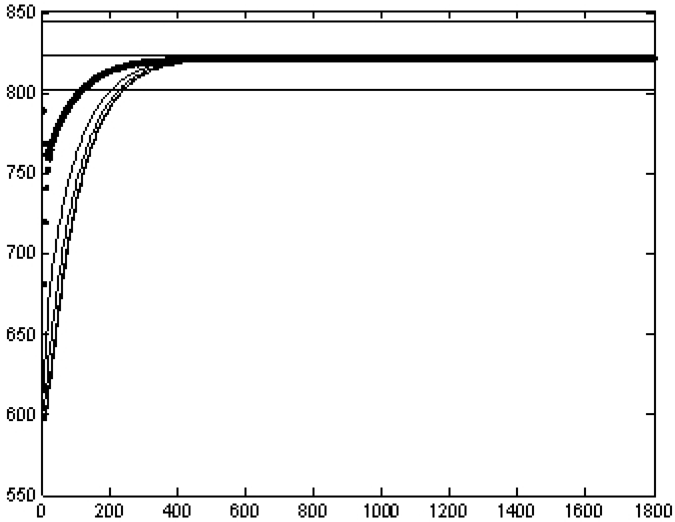

Рис. 2. Температура при управлении (12).

Выводы. Проведено сравнение решений вспомогательной системы уравнений типа Риккати с двумя переменными на интервалах стационарности. Показано, что соответствующий алгоритм управления можно использовать для достижения окрестности заданной температуры. Требуется дальнейшее исследование свойств сеточных функций k_i^n, φ_i^n.

Литература

1. *Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С.* Лекции по теории стабилизации. – Свердловск: Уральск. гос. ун-т, 1972. – 273 с.
2. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. – М.: Наука, 2003. – 400 с.
3. *Цапенко Н.Е.* Уравнения Риккати. Волновые процессы. – М.: Моск. горн. ун-т, 2008. – 244 с.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
5. *Самохвалова Т.П.* Численные алгоритмы приближенно-оптимального управления и стабилизации // Проблемы автоматики и управления. – Бишкек: Илим, 2009. – № 1. – С. 31–38.