УДК 517.15 (517.958) (575.2) (04)

ХОЛОДНАЯ ЭМИССИЯ ИЗ ПРОВОДЯЩЕГО ДИСКА

В.В. Попов, Д.А. Летник, К.Р. Нурутдинова

Использованием ряда асимптотических методов проанализирована квантовая туннельная эмиссия электронов из уединенного проводящего диска. Диск помещен во внешнее электрическое поле. Определен электрический заряд диска как функция времени.

Ключевые слова: асимптотика; квантовое туннелирование.

Автоэмиссия (квантовая туннельная эмиссия электронов) из металла изучалась во многих работах, в первую очередь в статье Фаулера и Нордхейма [1], но эмитирующий проводник при этом представлял собой продолжение металлической цепи, а потому он не заряжался. Уединенная частица в результате автоэмиссии будет приобретать заряд. Огромное значение для автоэмиссии имеют сингулярности формы поверхности: острия, углы и т.д., повышающие эмиссионные свойства частицы. Мы рассмотрим ситуацию, когда частица в форме диска помещена во внешнее электрическое поле, и ее плоскость параллельна вектору напряженности поля **E**. Этот вектор параллелен оси координат z. Нормаль к диску направлена вдоль оси x и проходит через центр диска.

Целью работы является определение заряда диска $q(t,E,a,A)$, где t – время; E – модуль напряженности внешнего однородного постоянного электрического поля; a – радиус диска; A – работа выхода из металла.

Заряд диска находится путем решения дифференциального уравнения

$$\frac{dq}{dt} = I(q,E,a,A), \tag{1}$$

где I – электрический ток. Этот туннельный ток электронов течет с поверхности диска в x – направлении с обеих его поверхностей. Он выражается через плотность тока $j_x(q,E,a,A,y,z)$ формулой

$$I = \iint j_x dydz, \tag{2}$$

где интегрирование идет по поверхности диска, то есть, $y^2 + z^2 \le a^2$. Туннелирование происходит только в области $z < 0$.

Плотность туннельного тока выражается в асимптотическом ВКБ – приближении через коэффициент прохождения по формуле [2, 3]:

$$j_x = \left(\frac{4\pi em}{\hbar^3}\right)\int_0^F \varepsilon T(q,E,a,A,y,z,\varepsilon)d\varepsilon. \tag{3}$$

Здесь F – уровень Ферми; $\varepsilon = mv_x^2/2\,$ – x – компонента кинетической энергии электрона; $\hbar$ – постоянная Планка; e – модуль заряда электрона; m – его масса. Температура вырожденного ферми-газа электронов металла принята в (3) равной нулю. Буквой T обозначен коэффициент туннельного прохождения электрона сквозь барьер:

$$T = \exp\left\{-\left(\frac{2\sqrt{2m}}{\hbar}\right)K(q,E,a,A,y,z,\varepsilon)\right\}. \tag{4}$$

Коэффициент K вычисляется по формуле [2]:

$$K = \int_0^{x_0} \sqrt{V - F + \varepsilon}\,dx. \tag{5}$$

Здесь x_0 – значение координаты x, где подынтегральное выражение обращается в нуль. Буквой V обозначена потенциальная энергия электрона, туннелирующего из диска. Она равна $V = V_0 - e\varphi$, где V_0 есть высота потенциального барьера для электронов в металле, отсчитываемая от дна зоны проводимости в отсутствие внешнего поля **E**, а φ – суммарный потенциал электрического поля вокруг диска. Этот потенциал равен

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_p + \varphi_q,$$

где $\varphi_e = -Ez$,

$$\varphi_p\left(E,a,x,y,z\right) = Ez\left(\frac{2a}{\pi}\right)\left\{\frac{1}{a}arctg\sqrt{\frac{a^2}{C}} - \frac{\sqrt{C}}{a^2+C}\right\}, \tag{6}$$

$$\varphi_q\left(q,a,x,y,z\right) = \frac{q}{a}\left\{arctg\sqrt{\frac{a^2}{C}} - \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{7}$$

Здесь φ_e – потенциал внешнего однородного статического электрического поля, $E = |\,\mathbf{E}\,|$.

Потенциал φ_p есть поле диска, поляризовавшегося в результате внешнего воздействия. Он найден нами как предельный случай потенциала поляризованного двухосного эллипсоида [4]. При этом

$$2C = r^2 - a^2 + \left[\left(r^2-a^2\right)^2 - 4a^2x^2\right]^{1/2},\ r^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Потенциал φ_q – это поле диска, имеющего (искомый) заряд q.

Заметим теперь, что на поверхности диска $y^2+z^2-a^2 \le 0$. Поэтому здесь $C=0$ при $x=0$. Существенная автоэмиссия происходит только при $|x| << a$. В этом случае

$$2C = y^2+z^2-a^2+\left[\left(y^2+z^2-a^2\right)^2-4a^2x^2\right]^{1/2}.$$

Соответственно, и $C << a^2$. Тогда, используя разложение $arctg\left(1/a\right) \approx \pi/2$, справедливое при $|a| << 1$, приведем выражение для K к виду:

$$K = a\sqrt{A}\int_0^{x_0}\sqrt{1+\omega-\beta\sqrt{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+4x^2}}}\,dx. \tag{8}$$

При получении формулы (8) осуществлен переход к безразмерным переменным $x \to ax$, $y \to ay$, $z \to az$, и обозначено:

$A = V_0 - F -$ работа выхода из металла. Введены безразмерные величины

$$\omega = \frac{\varepsilon}{A},\ \beta = \frac{-\dfrac{4eEaz}{\pi} - \dfrac{qe}{a}}{A\sqrt{2}},\ \gamma = 1 - y^2 - z^2. \tag{9}$$

Из условия $q=0$ в начальный момент времени $t=0$ вытекает, что при этом и $\beta > 0$, поскольку туннелирование может происходить только в область отрицательных значений z. На поверхности диска параметр $\gamma > 0$.

Заменой переменной $x = \frac{\gamma}{2}sh\mu$ интеграл (8) приводится к виду

$$K = \frac{a\gamma}{2}\left[A\left(1+\omega\right)\right]^{1/2}\int_0^{\mu_0}\left(1-2\delta sh\frac{\mu}{2}\right)^{1/2}ch\mu d\mu. \tag{10}$$

Здесь $2\delta = \dfrac{\beta\sqrt{2\gamma}}{1+\omega}$, а μ_0 – значение μ, где подынтегральное выражение обращается в нуль.

Интеграл (10) связан с эллиптическими функциями [5], однако проще сразу искать его асимптотическое приближение.

Физический интерес представляет лишь случай, когда $\delta << 1$. В этом асимптотическом пределе интеграл (10) после замены переменной интегрирования $\delta \exp\left(\frac{\mu}{2}\right) = t$ принимает вид:

$$K = \frac{a\gamma}{2\delta^2}\left[A\left(1+\varpi\right)\right]^{1/2}\int_0^1 \left(1-t\right)^{1/2} t dt + O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{11}$$

Простые вычисления приводят к результату

$$K = \frac{8a\sqrt{A}\left(1+\omega\right)^{5/2}}{15\left(\in z+Q\right)^2}, \tag{12}$$

где $\in = 4eEa/\left(\pi A\right)$ – безразмерная напряженность внешнего электрического поля *E*, а $Q = qe/\left(aA\right)$ – безразмерный искомый заряд *q*. В принятом приближении *K* не зависит от *y*. Напомним, что безразмерные переменные *z* и *y* на поверхности диска удовлетворяют условию $1 - y^2 - z^2 \geq 0$, причем *z* имеет только отрицательные значения. В результате находим

$$T = \exp\left[-\frac{a\left(1+\omega\right)^{5/2}}{\left(\in z+Q\right)^2}\right], \tag{13}$$

где $a = \frac{16}{15}\frac{a\sqrt{2mA}}{\hbar}$, $-1 \leq z \leq 0$.

Плотность тока автоэмиссии j_x вычисляем по формуле (3). Поскольку в ВКБ приближении предполагается, что $a/\in^2 >> 1$ и $Q\left(0\right) = 0$, то, как следствие, в интеграл (3) основной вклад дают значения $\omega = \frac{\varepsilon}{A} << 1$, и поэтому в формуле (13) мы можем осуществить разложение $\left(1+\omega\right)^{5/2} \approx 1 + \left(5/2\right)\omega$. Тогда

$$j_x = \left(\frac{4\pi emA^2}{\hbar^3}\right)\int_0^{F/A} \omega \exp\left\{-\frac{a\left[1+\left(5/2\right)\omega\right]}{\left(\in z+Q\right)^2}\right\} d\omega \cdot \tag{14}$$

Верхний предел в последнем интеграле можно заменить бесконечным в силу используемого приближения ВКБ. Вычисляя интеграл (14), найдем

$$j_x = \left(\frac{16\pi emA^2}{25a^2\hbar^3}\right)\left(\in z+Q\right)^4 \exp\left[-\frac{a}{\left(\in z+Q\right)^2}\right]. \tag{15}$$

В предэкспоненте далее заменим *z* на –1, поскольку только при близких к этому значению *z* туннелирование идет с заметной интенсивностью в случае большого значения параметра $a/\in^2$.

Вычислим теперь ток электронов $I\left(q\right)$, туннелирующих с поверхности пластины по формуле (2). Так как автоэмиссия происходит только в область

$$z < 0, \text{ то } I = \iint j_x dydz = aP^2\int_{-1}^{0} dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \exp\left[-\frac{a}{\left(\in z+Q\right)^2}\right], \tag{16}$$

$$P = \frac{16\pi emA^2}{25a^2\hbar^3}\left(\in - Q\right)^4.$$

Интегрирование по *y* идет в пределах четверти пластины, то есть *y* меняется в пределах от $y = 0$ до $y = \left(1-z^2\right)^{1/2}$. Вычислив интеграл по *y*, получим:

$$I = 4P^2 \int_{-1}^{0} \sqrt{1-z^2} \exp\left[-\frac{a}{(\in z+Q)^2}\right] dz \approx 4\sqrt{2}Pa^2 \int_{-1}^{0} \sqrt{1+z} \exp\left[-\frac{a}{(\in z+Q)^2}\right] dz\,, \tag{17}$$

после чего произведем замену переменной интегрирования $z = \lambda^2 - 1$. Тогда

$$I = 8\sqrt{2}Pa^2 \int_0^{\infty} \lambda^2 \exp\left\{\left[-\frac{a}{\in\left(\lambda^2-1\right)}+Q\right]^2\right\} d\lambda\,. \tag{18}$$

Лишь малые $\lambda << 1$ дают заметный вклад в интеграл (18), поэтому верхний предел интегрирования в нем заменен на бесконечный.

Теперь предположим, что $Q << \in$, то есть рассматривается начальная стадия зарядки. Обратим внимание на то, что, согласно (13) автоэмиссия прекратится, когда заряд Q достигнет значения $Q = \in$. Практически она прекратится еще задолго до этого.

Произведем разложение в показателе экспоненты интеграла (18):

$$\frac{1}{\left[\in\left(\lambda^2-1\right)+Q\right]^2} \approx \frac{1}{\in^2}\left[1+\frac{2}{\in}\left(\in\lambda^2+Q\right)\right],$$

полагая, что $\in\lambda^2 + Q << \in$. После такого разложения интеграл (18) может быть вычислен, и результат имеет вид

$$I(q,E,a,A) = \left(\frac{\sqrt{\pi}Pa^2 \in^3}{a^{3/2}}\right) \exp\left[-\frac{a}{\in^2}\left(1+\frac{2Q}{\in}\right)\right]. \tag{19}$$

Теперь искомый заряд q как функция времени может быть найден путем решения дифференциального уравнения (1). Интегрирование с учетом начального условия

$$Q(0,E,a,A) = \frac{eq(0,E,a,A)}{aA} = 0$$

дает $Q(t,E,a,A) = \dfrac{\in^2}{2a}\ln(1+\Delta)$, (20)

где $\Delta = \dfrac{25\sqrt{15}\pi^{3/2}}{64}\left[\dfrac{e^2 \in^4 t}{a\left(2mAa^2\hbar^2\right)^{1/4}}\right]\exp\left(-\dfrac{a}{\in^2}\right)$. (21)

Перейдем к размерным переменным. При этом будем t выражать в секундах, E – в вольтах/см, a – в сантиметрах, A – в электрон-вольтах. Заряд q тогда будет измеряться в единицах СГС. Результат имеет вид:

$$q(t,E,a,A) = 6{,}3\cdot 10^{-11}\left(\frac{E^3a^3}{A^{5/2}}\right)\ln(1+\Delta)\,, \tag{22}$$

где $\Delta = 2{,}1\cdot 10^5\left(\dfrac{Ea^{5/2}t}{A^{17/4}}\right)\exp\left[-3{,}4\cdot 10^7\left(\dfrac{A^{5/2}}{aE^2}\right)\right]$. (23)

Из (23) следует, что заряд q весьма чувствителен по отношению к значениям основных переменных E, a, A. Численные оценки по формулам (22)–(23) показывают возможность практического применения автоэмиссии в полях $E \approx 10^4$ В/см, если $a \approx 1$ см, $A \approx 1$ эВ.

Литература

1. *Fowler R.H., Nordheim L.* // Proc. Royal Soc. – 1928, ser. A. – V. 119. – № 781. – P. 173.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. – М.: Наука, 1989. – 767 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. – М.: Наука, 1976. – 584 с.

4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
5. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.