УДК 517.97 (575.2) (04)

ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ МЕТОДОМ ШАГОВ ПРИ СИНТЕЗЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М.К. Калманбетов, А.З. Полотова

Методом шагов исследованы процессы с запаздыванием. Полученные результаты могут быть использованы в приложениях теории оптимального управления.

Ключевые слова: метод шагов; запаздывание; малый параметр; оптимальное управление; теория регулярно-возмущенных уравнений.

Объект описывается системой квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + \int_0^T \left[K_1(t,s)x(s) + K_2(t,s)x(s-h)\right]ds +$$
$$+\mu f\left[x(t), x(t-h), \int_0^T \left(K_3(t,s)x(s) + K_4(t,s)x(s-h)\right)ds\right]. \tag{1}$$

Заданы начальные функции

$$x(t) = \phi(t) \text{ при } -h \le t \le 0, x(0) = \phi(0). \tag{2}$$

Здесь $\mu > 0$ – малый параметр; $h > 0$ – запаздывания; $f(\bullet)$ – вектор-функция размера n непрерывной по $x(t)$, $x(t) \in E^n$, $A(t)$ – матрица размера $n \times n, u \in E^r$, $K_i(t,s)$, $i = \overline{1,4}$ – известные матричные функции, заданные в прямоугольной области $D = [0 \le t, s \le T]$.

Требуется определить управление $u = u\big(x(t), x(t-\mu)\big)$, минимизирующее квадратичный критерий обобщенной работы [3].

$$J[u(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x^T(t)Dx(t) + u^T(t)Ru(t) + u_{опт}^T(t)Ru_{опт}(t)\right]dt, \tag{3}$$

где D – положительно полуопределенная; R – положительно определенная матрицы соответствующих размеров.

Задачу можно решить различным способом в зависимости от величины запаздывания h. Отметим, что полагая $\mu = 0$ в (1), имеем задачу синтеза систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, которая в виде аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) впервые решена в [4].

Величина запаздывания h не является малой. В случае, когда запаздывание $h > 0$ является действительным числом, не являющимся малой величиной, то пользуясь тем, что ее величина сравнима с отрезком $[0, T]$, на котором требуется решить задачу синтеза, можно получить оптимальное управление в виде последовательностей управляющих функций.

Для решения задачи применим метод шагов и теорией регулярно-возмущенных уравнений [1, 2].

Оптимизацию задачи (1)–(3) будем вести для каждого интервала

$$t_{i-1} = (i-1)h \le t \le ih = t_i, \ \ i = 1,2,3,...,n, \tag{4}$$

где n – число разбиения интервала $[0, T]$ определяется из равенства: $n = \left[\dfrac{T}{h}\right]$.

Подставляя значения $x(t) = \phi(t)$ в (1) и определяя для последующих интервалов (4) как решение системы без запаздываний, перепишем систему (1), начальные условия (2) и критерий в виде:

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + \int_0^h K_1(t,s)x(s)ds + m(t) + \\ +\mu f\left[x(t), \phi(t-h), \int_0^h K_3(t,s)x(s)ds, \int_0^h K_4(t,s)\phi(s-h)ds\right],\end{gathered} \tag{5}$$

где $m(t) = A_1\phi(t-h) + \int_0^h K_2(t,s)\phi(s-h)ds.$

Обозначая оптимальное управление и координату состояния задачи (3) и (5) через $u(t,\mu)$, $x(t,\mu)$, представим их в виде следующих рядов по степеням малого параметра μ:

$$u(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\mu^k, \quad x(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\mu^k. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), имеем:

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\dot{x}_k(t)\mu^k = A(t)\sum_{k=0}^{\infty}x_k(t)\mu^k + B(t)\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\mu^k + m_0(t) + \int_0^h K_1(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}x_k(t)\mu^k ds + m(t) + \\ +\mu f\left[\sum_{k=0}^{\infty}x_k(t), \phi(t-h), \int_0^h K_3(t,s)\sum_{k=0}^{\infty}x_k(s)\mu^k ds, \int_0^h K_4(t,s)\phi(s-h)ds\right] = \mu f(t-\mu),\end{gathered} \tag{7}$$

$$J[u] = \sum_{k=0}^{\infty} J[u_k(t)]\mu^k.$$

Функцию $f(t,\mu)$ разлагаем в ряд Тейлора по степеням малого параметра μ:

$$f(t,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{f^{(i)}(t,0)}{i!}\mu^i, \quad i = 0,1,2,3,..., \tag{8}$$

где $f(t,0) = f\left[x_0(t), \phi(t-h), l(t) + \int_0^t K_4(t,s)\phi(s-h)ds\right],$

$$l(t) = \int_0^T K_3(t,s)x_0(s)ds + \int_0^T K_4(t,s)\phi(s)ds.$$

$$f'(t,0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)}x_1(t)+\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{x=x_0(t)}\cdot\int_0^h K_3(t,s)x_1(s)ds,$$

$$f''(t,0)=\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0(t)}x_2(t)+\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{x=x_0(t)}\cdot\int_0^h K_3(t,s)x_2(s)ds+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0(t)}x_1^2(t)+$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial l}\Big|_{x=x_0(t)}x_1(t)\cdot\int_0^h K_3(t,s)x_1(s)ds+\frac{\partial^2 f}{\partial l^2}\Big|_{x=x_0(t)}\cdot\int_0^h K_3(t,s)x_1^2(s)ds. \tag{9}$$

Подставляя в правую части равенства (7) эти разложения, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, при μ^0 получаем систему

$$\dot{x}_0(t)=A(t)x_0(t)+B(t)u_0(t)+m(t)+\int_0^h K_1(t,s)x_0(s)ds, \tag{10}$$

с начальным условием

$$x_0(0)=\phi(0),\ \ 0\le t\le h. \tag{11}$$

Подставляя разложения (6) в (3), имеем:

$$J\left[u_0(t)\right]=\frac{1}{2}\int_0^T\left[x_0^T(t)Dx_0(t)+u_0^T(t)Ru_0(t)+u_{0onm}^T(t)Ru_{0onm}(t)\right]dt\ . \tag{12}$$

Рассматривая $m_0(t)$ как постоянно действующие возмущение и используя результаты, полученные в [3, 4], можно записать оптимальное управление в виде

$$u_0(t)=-R^{-1}B^T\left[p_0(t)x_0(t)+q_0(t)\right],\qquad t\in[0,h], \tag{13}$$

где $p_0(t)$ является решением системы матричных интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-p_0(t)A_1(t)-A^T(t)p_0(t)+D-\int_0^h K_1(t,s)p_0(s)ds \tag{14}$$

с краевым условием

$$p_0(h)=h, \tag{15}$$

где $A_1(t)=A(t)-K_1(t),\quad K_1(t)=\int_0^h K_1(t,s)ds.$

Векторная функция $q_0(t)$ находится как решение векторного уравнения

$$\frac{dq_0(t)}{dt}=\left[p_0(t)s(t)-A^T(t)\right]q_0(t)-p_0(t)m(t) \tag{16}$$

с граничным условием

$$q_0(h)=0, \tag{17}$$

где $s(t)=BR^{-1}B^T$.

Таким образом, задача построения оптимального управления нулевого приближения относительно малого параметра μ в интервале $[0,h]$ решена.

Аналогичным образом можно получить последовательности управления $u_1(t),...,u_N(t),...$ на интервале $[0,h]$, учитывая, что $f_i(t)=f^{(i)}(t,0),\ \ i=1,2,....$

После N-й итерации запишем

$$u_N^h(t,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t,\mu)\mu^k+\mu^{k+1}\xi(t,\mu),$$

$$J\left(u_N^h\right)=\sum_{k=0}^{\infty}J\left(u_k\right)\mu^k+\mu^{k+1}\eta\left(t,\mu\right),$$

где $\xi\left(t,\mu\right)$ и $\eta\left(t,\mu\right)$ – остаточные члены рядов (6).

Теорема 1. Если имеют место предположения относительно функции $f\left(\cdot\right)$ и задача Коши (10) и подобные задачи, получаемые в последующих приближениях, имеют единственные решения, то последовательности оптимальных управлений на $\left[0,h\right]$ определяются равенствам (13) и другими равенствами, получаемыми в последующих приближениях.

Теорема 2. Если имеет место теорема 1, то существуют постоянные c_1,c_2 и μ такие, что при $0<\mu\le\mu_0$ и $0\le t\le h$ справедливы неравенства

$$\left|\xi\left(t,\mu\right)\right|\le c_1,\quad \left|\eta\left(t,\mu\right)\right|\le c_2.$$

Поступая аналогичным образом можно решить задачи синтеза для интервалов $\left[h,2h\right],...,\left[\left(n-1\right)h,nh=T\right]$ и получить последовательность управлений и критерия качества:

$$u_N^{2h}\left(t\right),...,u_N^{nh}\left(t\right),J\left(u_N^{2h}\left(t\right)\right),...,J\left(u_N^{nh}\left(t\right)\right).$$

Литература

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971.
2. *Иманалиев М.* Колебания и устойчивость сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе, 1974.
3. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными системами. – М.: Наука, 1977.
4. *Калманбетов М.К.* Асимптотические методы в теории управления систем с особенностями. – Жалалабат, 2003.