УДК 517.968 (575.2) (04)

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ТРЕТЬЕГО РОДА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

М.И. Иманалиев, А. Асанов, Р.А. Асанов

Изучены вопросы существования, несуществования и единственности решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. Получены формулы для решения таких уравнений.

Ключевые слова: вырожденное ядро; интегральное уравнение третьего рода; существование решения.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение третьего рода.

$$p(t)\varphi(t)=\int_a^b\sum_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)\varphi(s)ds+f(t),t\in[a,b), \tag{1}$$

Где $p(a)=0$, $p(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ и $f(t)$ – известные непрерывные на $[a, b)$ функции, $\varphi(t)$ – искомая непрерывная на $[a, b)$ функция, $-\infty<a<b\le+\infty$.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого и третьего рода исследовались в [1–5]. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [3], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М.М. Лаврентьеву. В данной работе построены решения для линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода.

Всюду будем предполагать, что

$$p(t)=\prod_{i=1}^m p_i(t),p_i(a)=0,p_i(t)\in C[a,b)i=1,2,\ldots,m\,. \tag{2}$$

Пусть

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds,i=1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Тогда из (1) получим

$$p(t)\varphi(t)=\sum_{j=1}^n c_j a_j(t)+f(t),t\in[a,b), \tag{4}$$

где c_j неизвестные постоянные, $j = 1, 2,\ldots, n$. Предполагая $t=a$, из (4) имеем

$$\sum_{j=1}^n c_j a_j(a)+f(a)=0. \tag{5}$$

Вычитая (5) из (4) получим

$$p(t)\varphi(t)=\sum_{j=1}^n c_j\left[a_j(t)-a_j(a)\right]+\left[f(t)-f(a)\right],t\in[a,b). \tag{6}$$

Предположим выполнение следующих условий:

Для всех $k = 1, 2, \ldots, m$ и для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$,

$\alpha_{i,k}(t)\in C[a,b),\alpha_{i,m}(t)b_j(t)\in L_1(a,b),$ где

$$\alpha_{i,k}(t)=\frac{\alpha_{i,k-1}(t)-\alpha_{i,k-1}(a)}{p_k(t)},\alpha_{i,0}(t)=a_i(t),t\in[a,b), \tag{7}$$

$$\alpha_{i,k}(a)=\lim_{t\to a}\lim_{t\to a}\alpha_{i,k}(t);$$

b) Для всех $k = 1, 2, \ldots, m$ и для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$,
$F_k(t)\in C[a,b),F_m(t)b_j(t)\in L_1(a,b)$, где

$$F_k(t)=\frac{F_{k-1}(t)-F_{k-1}(a)}{p_k(t)},F_0(t)=f(t),t\in[a,b),F_k(a)=\lim_{t\to a}\lim_{t\to a}F_k(t). \tag{8}$$

Далее, в силу (2), (7) и (8), для определения неизвестных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из (6) получим следующую систему:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}c_j a_j(a)+f(a)=0,\\ \sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_{j,k}(a)+F_k(a)=0,k=1,2,\ldots,m-1\end{cases} \tag{9}$$

Учитывая (9) из (6) имеем:

$$\varphi(t)=\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_{j,m}(t)+F_m(t),t\in[a,b). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (3) получим:

$$c_i=\int_a^b b_i(s)\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_{j,m}(s)+F_m(s)\right)ds,i=1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

Введем следующие обозначения:

$$k_{ij}=\int_a^b\alpha_{j,m}(s)b_i(s)ds,l_i=\int_a^b F_m(s)b_i(s)ds,i,j=1,2,\ldots,n. \tag{12}$$

Тогда из (11) получим

$$c_i-\sum_{i=1}^{n}k_{ij}c_j=F_i,i=1,2,\ldots,n. \tag{13}$$

Таким образом имеем систему линейных алгебраических уравнений (9) и (13), которая определяет c_i.

Введем следующие обозначения:

$$K=\begin{pmatrix}1-k_{11} & -k_{12} & \ldots & -k_{1n}\\ -k_{21} & 1-k_{22} & \ldots & -k_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ -k_{n1} & -k_{n2} & \ldots & 1-k_{nn}\\ a_1(a) & a_2(a) & \ldots & a_n(a)\\ \alpha_{11}(a) & \alpha_{21}(a) & \ldots & \alpha_{n1}(a)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ \alpha_{1,m-1}(a) & \ldots & \alpha_{n,m-1}(a) & \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \ldots\\ c_n\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\\ \ldots\\ l_n\\ -f(a)\\ F_1(a)\\ \ldots\\ F_{m-1}(a)\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Учитывая (14), запишем систему уравнений (9) и (13) в следующей форме

$$KC = L \tag{15}$$

Теорема. Пусть $r = rangK$, $r_1 = rang(K, L)$, где матрицы K и L определены через (14), (7), (8) и (12). Тогда:

Если $r\neq r_1$, то интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b)$;

Если $r = r_1 = n$, то интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b)$. Это решение определяется формулой (10), где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – единственное решение системы (15);

Если $r = r_1 < n$, то интегральное уравнение (1) имеет решение в пространстве $C[a, b)$, которое зависит от $n\text{-}r$ параметров. Эти решения определяются формулой (10), где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – решения системы (15). Из них $n–r$ – произвольные постоянные, а оставшиеся r зависят от них;

Доказательство

Пусть $r \neq r_1$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система (15) не имеет решений. Таким образом интегральное уравнение (1) не имеет решений в пространстве $C[a, b)$.

Пусть $r = r_1 = n$. Тогда по теореме Кронекера–Капелли система (15) имеет единственное решение. Таким образом интегральное уравнение (1) имеет единственное решение в пространстве $C[a, b)$. Это решение определяется по формуле (10), где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – единственное решение системы (15)

Пусть $r = r_1 < n$. Тогда по теореме Кронекера-Капелли система (15) имеет решение, которое зависит от $n\text{-}r$ параметров. Поэтому интегральные уравнения имеют решения в пространстве $C[a, b)$, зависящие от $n\text{-}r$ параметров. Эти решения определяются по формуле (10), где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – решения системы (15). Из них $n\text{-}r$ произвольные постоянные, а остальные r зависят от них. *Теорема доказана*.

Пример. Рассмотрим интегральные уравнения (1), где $a=0,\ b=1$,

$n=2, p(t)=t\sqrt{t}, a_1(t)=t+1, b_1(t)=t, a_2(t)=t^2+3, b_2(t)=t^3,\ f(t)=t^3+\beta, \alpha u \beta$ – параметры, $a \neq 0$,

т.е. рассмотрим уравнение

$$t\sqrt{t}\varphi(t)=\int_0^1\left[(t+1)s+\alpha(t^2+3)s^3\right]\varphi(s)\,ds+t^3+\beta, t\epsilon[0;1). \tag{16}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} c_1=\int_0^1 s\varphi(s)\,ds, \\ c_2=\int_0^1 s^3\varphi(s)\,ds. \end{cases} \tag{17}$$

Учитывая (17) из (16) имеем:

$$t\sqrt{t}\varphi(t)=c_1(t+1)+c_2\alpha(t^2+3)+t^3+\beta, t\epsilon[0;1). \tag{18}$$

Подставляя t=0 из (18) получим:

$$c_1+3\alpha c_2=-\beta. \tag{19}$$

Вычитывая (19) от (18) получаем:

$t\sqrt{t}\varphi(t)=c_1t+c_2\alpha t^2+t^3, t\epsilon[0;1)$, т.е.

$$\sqrt{t}\varphi(t)=c_1+c_2\alpha t+t^2, t\epsilon[0;1). \tag{20}$$

Полагая t=0, из (20) имеем:

$$c_1=0 \tag{21}$$

Учитывая (21), из (20) получим:

$$\varphi(t)=c_2\alpha\sqrt{t}+t\sqrt{t}, t\epsilon[0;1). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (17) имеем:

$$\begin{cases} c_1=\int_0^1 s\left(c_2\alpha\sqrt{s}+s\sqrt{s}\right)ds, \\ c_2=\int_0^1 s^3\left(c_2\alpha\sqrt{s}+s\sqrt{s}\right)ds. \end{cases}$$

Отсюда имеем:

$$\begin{cases} c_1 = (2\alpha c_2 \dfrac{s^{\frac{5}{2}}}{5} + 2\dfrac{s^{\frac{7}{2}}}{7})\Big|_0^1, \\ c_2 = (2\alpha c_2 \dfrac{s^{\frac{9}{2}}}{9} + 2\dfrac{s^{\frac{11}{2}}}{11})\Big|_0^1, \end{cases} \text{т.е.} \begin{cases} c_1 - \dfrac{2\alpha}{5} c_2 = \dfrac{2}{7}, \\ \left(\dfrac{9-2\alpha}{9}\right) c_2 = \dfrac{2}{11}. \end{cases} \quad (23)$$

Тогда, решая систему уравнений (19), (21) и (23), получим:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = -\dfrac{1}{3\alpha}\beta, \\ c_2 = -\dfrac{5}{7\alpha}, \\ c_2 = \dfrac{18}{11(9-2\alpha)}. \end{cases} \quad (24)$$

Тогда имеют место следующие случаи:

Если $\alpha = -\dfrac{495}{16}, \beta \neq \dfrac{15}{7}$, то система уравнений (24) не имеет решения. Поэтому интегральные уравнения (16) не имеют решений.

Если $\alpha = -\dfrac{495}{16}, \beta = \dfrac{15}{7}$, то система уравнений (24) имеет единственное решение $c_1 = 0, c_2 = \dfrac{16}{693}$, которое определяется по формуле (19). Поэтому интегральное уравнение (16) имеет единственное решение: $\varphi(t) = -\dfrac{5}{7}\sqrt{t} + t\sqrt{t}, t \in [0;1)$.

Если $\alpha \neq -\dfrac{495}{16}$, то система уравнений (24) не имеет решения. Поэтому интегральные уравнения (16) не имеют решений.

Литература

1. *Цалюк З.Б.* Итоги науки и техники. Сер. матем. анализ. – М., 1977. – Т. 15. – С. 131–198.
2. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1979. – Т. 19. – №4. – С. 970–989.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.
4. *Иманалиев М.И., Асанов А.* О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Докл. АН СССР. – 1989. – Т. 309. – №5. – С. 1052–1055.
5. *Иманалиев М.И., Асанов А.* Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Докл. РАН. – 2007. – Т. 415. – №1. – С. 14–17.