УДК 517.968 (575.2) (04)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

М.И. Иманалиев, А.Б. Байзаков

Изучена разрешимость задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения в частных производных; принцип сжатых отображений; интегральные уравнения.

До сих пор остается малоисследованной областью проблема выяснения разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных. В [2, 3] найдены разрешимость и структура решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных, где для них предлагается аналитический метод построения решений классической задачи Коши. Сутью предложенного метода является преобразование решений исходной задачи Коши в эквивалентное ей интегральное уравнение Вольтерра, к которой применим принцип сжатых отображений. Целью настоящей работы является применение указанного аналитического метода к исследованию разрешимости задачи Коши для сингулярно-возмущенных дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка

$$\varepsilon^3 u_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 u_{tx} + \beta\varepsilon^2 u_{tt} + \alpha\beta\varepsilon u_t + (\alpha+1)\varepsilon u_x + \beta(\alpha+1)u = f(t,x,u(t,x)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \tag{2}$$

$$u_t(0,x) = \psi(x)\,, \tag{3}$$

где α, β — некоторые положительные постоянные, $f(t,x,u,u_t,u_x)$ — известная непрерывная функция; $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные непрерывные функции, равномерно ограниченные вместе со своими производными входящими в (1), $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Решение задачи Коши (1)–(3) ищем в виде

$$u(t,x) = c(t,x) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)\,d\rho ds\,, \tag{4}$$

где $c(t,x)$ — известная непрерывная функция, причем

$c(o,x) = \varphi(x)$,

$c_t(o,x) = \psi(x)$,

$Q(t,x)$ — новая неизвестная функция, которую необходимо определить.

Для определения функции $Q(t,x)$ необходимо подставлять (4) в (1). С этой целью из (4) последовательно находим следующие соотношения:

$$u_t(t,x) = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)\,d\rho ds +$$

$$+\int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3}\cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s)Q(s,\rho)\,d\rho ds\,.$$

Учитывая (4) имеем:

$$u_t = c_t - \frac{\alpha}{\varepsilon}\left(u - c\right) + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} \cos\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds . \tag{5}$$

$$u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t = c_{tt}(t,x) + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q\left(t,\rho\right) d\rho - \frac{\alpha}{\varepsilon^2}\left(u - c\right) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds =$$

$$= c_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t + \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t,\rho) d\rho - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}\left(u - s\right) . \tag{6}$$

Отсюда дифференцируя обе части получим:

$$u_{ttx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_{tx} = c_{ttx} + \frac{\alpha}{\varepsilon} c_{tx} + \frac{1}{\varepsilon^3} Q(t,x) -$$

$$-\frac{\beta}{\varepsilon}\left[u_{tt} + \frac{\alpha}{\varepsilon} u_t + \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}(u - c) - c_{tt} - \frac{\alpha}{\varepsilon} c_t \right] - \frac{\alpha+1}{\varepsilon^2}\left(u_x - c_x\right) . \tag{7}$$

Умножая обе части (7) на ε^3 имеем:

$$\varepsilon^3 u_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 u_{tx} + \beta\varepsilon^2 u_{tt} + \alpha\beta\varepsilon u_t + \left(\alpha+1\right)\varepsilon u_x + \beta\left(\alpha+1\right) u =$$

$$= \varepsilon^3 c_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 c_{tx} + \beta\varepsilon^2 c_{tt} + \alpha\beta\varepsilon c_t + \left(\alpha+1\right)\varepsilon c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c + Q(t,x) . \tag{8}$$

Заменяя левую часть уравнения (1) соотношением (8) имеем:

$$Q(t,x) = f\left(t, x, c + \int_0^t \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s) - \frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q(s,\rho) d\rho ds \right) + H(t,\varepsilon,c) = AQ , \tag{9}$$

где $H(t,\varepsilon,c) \equiv \varepsilon^3 c_{ttx} + \alpha\varepsilon^2 c_{tx} + \beta\varepsilon^2 c_{tt} + \alpha\beta\varepsilon c_t + \left(\alpha+1\right)\varepsilon c_x + \beta\left(\alpha+1\right) c$. (10)

Нелинейное интегральное уравнение (9) будем решать методом принципа сжатых отображений [1].

Предположим:

При всех $\{t \geq 0,\ -\infty < x < \infty\}$ функция $H(t,\varepsilon,c)$ непрерывна и ограничена

$\left\| H(t,\varepsilon,c) \right\| \leq M_0 = const$.

В области $R = \{0 \leq t < \infty,\ -\infty < x < u < \infty\}$ функция $f(t,x,u)$ непрерывна и ограничена

$\left\| f(t,x,u) \right\| \leq M_1 = const$. (11)

Кроме того, в этой области функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу u:

$\left\| f(t,x,u_2) - f(t,x,u_1) \right\| \leq L \left\| u_2 - u_1 \right\|$, (12)

где L — некоторая положительная постоянная.

Правую часть (9) рассмотрим как оператор $A[Q]$, действующий на функцию $Q(t,x)$.

Имеем $\left\| A[Q] \right\| \leq \left\| f(t,x,u) + H(t,\varepsilon,c) \right\| \leq M$, где $M = M_0 + M_1 = const$.

Учитывая (9), (11)–(12) оценим разность

$$\left\| Q_1(t,x) - Q_2(t,x) \right\| \leq \left\| f\left(t, x, c + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_1(t,s) d\rho ds \right) - \right.$$

$$\left. - f\left(t, x, c + \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)} \frac{1}{\varepsilon^2} \sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s) Q_2(t,s) d\rho ds \right) \right\| \leq$$

$$\leq L\left\{\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)\|Q_1(t,s)-Q_2(t,s)\|d\rho ds\right\}\leq L,$$

$$L\frac{1}{\alpha\beta}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|\leq\frac{1}{2}\|Q_1(t,x)-Q_2(t,x)\|,$$

где α, β — такие, что выполняется

$$\frac{L}{\alpha\beta}\leq\frac{1}{2}.$$

По принципу сжатых отображений, отсюда следует, что нелинейное интегральное уравнение (9) при всех $\{t\geq 0,\ -\infty<x<\infty\}$ имеет единственное непрерывное и ограниченное решение $Q(t,x)$.

Далее докажем ограниченность решений задачи Коши (1)–(3). Из (4) при всех $t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$ имеем неравенство:

$$\|u(t,x)\|\leq\|c(t,x)\|+\int_0^t e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)\right|\|Q(s,\rho)\|d\rho ds\leq c_0+\frac{M}{\alpha\beta}=M_{00}=const.$$

Итак, доказана

Теорема. Пусть 1) при всех $t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$ функции $c(t,x),\ c(0,x)=\varphi(x)$ равномерно ограничены вместе со своими производными входящими в (1); в области $R=\{0\leq t<\infty,\ -\infty<x<u<\infty\}$ функция $f(t,x,u)$ непрерывна и ограничена

$$\|f(t,x,u)\|\leq M_1=const.$$

Кроме того, в этой области R функция $f(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по третьему аргументу:

$$\|f(t,x,u_2)-f(t,x,u_1)\|\leq L\|u_2-u_1\|;$$

$$\frac{L}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}.$$

Тогда при всех $t\geq 0,\ -\infty<x<\infty$ нелинейное дифференциальное уравнение (1) с начальными данными имеет единственное ограниченное решение.

Замечание. Если уравнение (1) окажется линейным, т.е. правая часть имеет вид $f=f(t,x)$, то решение задачи (1)–(3) можно найти в квадратурах

$$u(t,x)=c(t,x)+\int_0^t\int_{-\infty}^x e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}(t-s)-\frac{\beta}{\varepsilon}(x-\rho)}\frac{1}{\varepsilon^2}\sin\frac{1}{\varepsilon}(t-s)\left[f(s,\rho)+H(s,\varepsilon,c(s,\rho))\right]d\rho ds,$$

где $H(t,\varepsilon,c(t,x))$ определяется из соотношения (10).

Это утверждение следует из (4), (9).

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин. С.В.* Элементы теории функций функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
2. *Иманалиев М.И., Байзаков А.Б.* К теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2008. – Вып. 37. – С. 3–7.
3. *Иманалиев М.И., Иманалиев Т.М., Какишев К.* О задачах Коши для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными шестого порядка // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2007. – Вып. 36. – С. 19–28.