

**АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

А.Р. Асанов, А.З. Зулпукаров, К. Алымкулов

Методом структурного сращивания К. Алымкулова строится равномерная асимптотика решения в случае, когда, соответствующее невозмущенное уравнение имеет слабую особую точку порядка две третьих.

Ключевые слова: краевая задача; метод структурного сращивания; дифференциальное уравнение.

Рассматривается краевая задача

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y^{(0)} \tag{1}$$

$$L_\varepsilon y(x) := \varepsilon y''(x) + x^{2/3} y'(x) - y(x) = f(x), \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, $f(x) \in C^{(\infty)}[0, 1]$. Здесь $x \in [0, 1]$ – независимая переменная и она также называется внешней переменной. $y^{(0)}$ – заданная постоянная.

Для невозмущенного уравнения ($\varepsilon = 0$)

$$L_0 y_0 := x^{2/3} y_0'(x) - y_0(x) = f(x) \tag{3}$$

точка $x = 0$ является слабой или интегрируемой особой точкой.

Для уравнения (3) ставим задачу Коши:

$$y_0(1) = y^{(0)}. \tag{4}$$

Решение задачи (3)–(4) представляется в виде

$$y_0(x) = p(x) \left[y^{(0)} + \int_1^x p^{-1}(s) s^{-2/3} f(s) ds \right] := a^{(0,0,0)}(\xi), \tag{5_0}$$

где $\xi = x^{1/3}$, $p(\xi) = \exp\{3\xi\}$ и $a^{(0,0,0)}(\xi) \in C^{(\infty)}[0, 1]$.

1. Внешнее решение задачи (1)–(2), удовлетворяющее начальному условию $y(1) = y^{(0)}$, ищется в виде

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots, \tag{6}$$

где $y_k(x)$ – пока неизвестные функции. Для определения этих функций получим уравнения:

$$Ly_1 = -y_0''(x), \quad y_1(0) = 0, \tag{7.1}$$

$$Ly_2 = -y_1''(x), \quad y_2(0) = 0, \tag{7.2}$$

$$\dots \dots \dots \tag{7.n}$$

Дважды дифференцируя $y_0(x)$ уравнения (7.1) запишем в виде

$$Ly_1(x) = x^{-5/3} a_0(\xi), \quad y_1(0) = 0,$$

где $a_0(\xi) \in C^{(\infty)}[0, 1]$. Отсюда, имеем

$$y_1(x) = p(\xi) \int_1^x s^{-7/3} p^{-1}(s^{1/3}) a_0(s^{1/3}) ds.$$

Выделяя главную часть интеграла в смысле Адамара [3], его можно представить в виде

$$y_1(x) = x^{-4/3} \left[a^{(1,0,0)}(\xi) + \xi^4 \ln x a^{(1,4,1)}(\xi) \right], \tag{5.1}$$

где $a^{(1,0,0)}(\xi), a^{(1,4,1)}(\xi) \in C^{(\infty)}[0, 1]$.

Методом полной математической индукции легко показывается, что

$$y_n(x) = x^{\frac{4+5(n-1)}{3}} \left[a^{(n,0,0)}(\xi) \right] + \xi^5 \ln x a^{(n,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(n,10,2)}(\xi) + \dots + (\xi^5 \ln x)^{n-1} a^{(n,5(n-1),n-1)}(\xi) + \xi^{4+5(n-1)} \ln^n x a^{(n,4+5(n-1),n)}(\xi), \quad n \in N. \quad (5.n)$$

Отметим, что в обозначении $a^{(i,j,k)}(\xi)$ первый индекс i — указывает номер приближений у функции $y_n(x)$, второй индекс j — степень ξ , а последний индекс степень $\ln x$. Все функции $y_k(x)$ определяются единственным образом. Поэтому структурное представление ряда (6) можно записать в виде:

$$y(x, \varepsilon) = a^{(0,0,0)}(\xi) + \varepsilon x^{-4/3} \{ a^{(1,0,0)}(\xi) + \xi^4 \ln x a^{(1,4,1)}(\xi) + \varepsilon \xi^{-5} [a^{(2,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(2,5,1)}(\xi) + \xi^9 \ln^2 x a^{(2,9,2)}(\xi)] + (\varepsilon \xi^{-5})^2 [a^{(3,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(3,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(3,10,2)}(\xi) + \xi^{14} \ln^3 x a^{(3,14,3)}(\xi)] + (\varepsilon \xi^{-5})^3 [a^{(4,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(4,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(4,10,2)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^3 a^{(4,15,3)}(\xi) + \xi^{19} \ln^4 x a^{(4,19,4)}(\xi)] + \dots + (\varepsilon \xi^{-5})^{n-1} [a^{(n,0,0)}(\xi) + \xi^5 \ln x a^{(n,5,1)}(\xi) + (\xi^5 \ln x)^2 a^{(n,10,2)}(\xi) + \dots + (\xi^5 \ln x)^{n-1} a^{(n,(n-1)5,n-1)}(\xi) + \xi^{4+5(n-1)} \ln^n x a^{(n,4+5(n-1),n)}(\xi)] + \dots \}, \quad \xi = x^{1/3}. \quad (6.0)$$

Из (6.0) легко видеть, что этот ряд является асимптотическим рядом на отрезке $\omega(\varepsilon) = [\varepsilon^\beta, 1], 0 < \beta < 3/5$. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Внешняя задача для краевой задачи (1)–(2) имеет единственное асимптотическое решение, представимое в виде

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) + \bar{R}_{n+1}(x, \varepsilon), \quad (7)$$

на отрезке $[\varepsilon^\beta, 1], 0 < \beta < 3/5$, где

$$|\bar{R}_{n+1}(x, \varepsilon)| \leq 2M \varepsilon^{n+1} \varepsilon^{-(5n+4)\beta/3} = 2M \varepsilon^{\beta/3} \cdot \varepsilon^{(5/3)(n+1)\alpha}. \quad (8)$$

Причем $\alpha + \beta = 3/5$.

Теперь построим внутреннее решение задачи (1)–(2). Для этого сделаем подстановку

$$x = \mu^3 t, \quad \mu^5 = \varepsilon, \quad (9)$$

тогда задача (1)–(2) имеет вид

$$u''(t) + t^{2/3} u'(t) = \mu [u(t) + f(\mu^3 t)], \quad u(0) = 0, \quad (10)$$

где $u(t) = y(x) | (x = \mu^3 t)$.

Решение задачи (10) нам надо срывать с внешним решением (6.0), для этого надо внешнее решение выразить через внутреннюю переменную t .

$$y(x, \varepsilon) | (x = \mu^3 t, \varepsilon = \mu^5, \zeta := t^{1/3}) = a_0^{(0,0,0)} + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s V_s(\zeta, x), \quad (11)$$

где $V_s(\zeta, x)$ — определенные функции.

Отметим, этот ряд имеет асимптотический характер на отрезке $\omega(\mu) = [\varepsilon^{\beta-3/5}, \varepsilon^{\alpha-3/5}], 0 < \alpha < \beta < 3/5$. На отрезке изменения t (можно считать, что $t \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Решение задачи (11) ищем в виде ряда

$$u(t, \mu) = u_0(t) + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^3 u_3(t) + \dots \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) для определения $u_j(t) (j = 0, 1, 2, \dots)$ имеем задачи:

$$Mu_0 := u_0''(t) + t^{2/3} u_0'(t) = 0, \quad u_0(0) = 0, \quad (13.0)$$

$$Mu_1 = u_0(t) + f_0, \quad u_1(0) = 0, \quad (13.1)$$

$$Mu_2 = u_1(t), \quad u_2(0) = 0, \quad (13.2)$$

$$Mu_3 = u_2(t), \quad u_3(0) = 0, \quad (13.3)$$

$$Mu_4 = u_3 + f_1 t, \quad u_4(0) = 0, \quad (13.4)$$

Далее используя следующие леммы, сращиваем внешние и внутренние решения.

Лемма 1. Однородное уравнение

$$Mz := z''(t) + t^{2/3} z' = 0$$

имеет два линейно независимых решения вида

$$z_1(t) = 1, \quad X(t) = \int_0^t \exp\{-3s^{5/3}/5\} ds = \begin{cases} t + O(t^{8/3}), & t \rightarrow 0, \\ A_0 + O(t^{-2/3} \exp\{-3t^{5/3}/5\}), & t \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$A_0 = \int_0^\infty \exp\{-3s^{5/3}/5\} ds.$$

Лемма 2. Общее решение неоднородного уравнения

$$Mz = g(t),$$

где $g(t) \in C^\infty[0, 1/\mu^3]$ представляется в виде

$$z(t) = a + bX(t) + T[g],$$

где a, b – произвольные постоянные; $T[g]$ – частное решение представимое в виде

$$T[g] := \int_0^t X(t) e^{3s^{5/3}/5} g(s) ds - \int_0^t e^{3s^{5/3}/5} X(s) g(s) ds. \quad (14)$$

Тогда получаем следующую теорему.

Теорема 2. Внутреннее решение задачи (2) с начальным условием $y(0)$ имеет единственное асимптотическое решение на отрезке $x \in [0, \varepsilon^\alpha]$ или $t \in [0, \varepsilon^{\alpha-3/5}]$ и оно представляется в виде асимптотического ряда (12), которое при $t \in [\varepsilon^{\beta-3/5}, \varepsilon^{\alpha-3/5}]$ имеет вид (11).

$$U(t, \mu) = a^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} \mu^k V_k(t, x) + R_{5n+1}(t, \mu),$$

где $|R_{5n+1}(t, \mu)| \leq M(\mu \zeta)^{5n+1} = Mx^{(5n+1)/3} = M\varepsilon^{(5n+1)\alpha/3}$.

Теперь составим равномерное приближение задачи (1)–(2)

$$Y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + U_{5n}(t, \mu) - V_{5n}(t, \mu),$$

где $Y_n(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x)$, $U_{5n}(t, \mu) = a^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} u_k(t, \mu)$,

$$V_{5n}(t, \mu) = a_0^{(0,0,0)} + \sum_{k=1}^{5n} \mu^k V_k(t, x).$$

Из теоремы 1 и 2 вытекает следующая

Теорема 3. Выражение $Y(x, \varepsilon)$ является равномерным приближением задачи (1)–(2) и имеет место оценка

$$|y(x, \varepsilon) - Y(x, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^{(5n+1)\alpha/3}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Литература

1. Алымкулов К., Зулпукаров А.З. Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью // Доклады РАН. – 2004. – Т. 398. – №5. – С. 1–4.
2. Зулпукаров А.З. Метод структурного сращивания для решения краевых задач сингулярно возмущенных уравнений второго порядка с особыми точками: Автореф. канд. дисс. – Ош, 2009.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975. – 48 с.