УДК 517.956 (575.2) (04)

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Сопуев, Н.К. Аркабаев

Доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральным условием для линейного уравнения в частных производных третьего порядка.

Ключевые слова: уравнения; нелокальная задача; нелокальные условия; интегральные уравнения; ограниченное решение.

В области $D=\{(x,y):0<x<+\infty,\ 0<y<h\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxx}-u_{xy}+c(x,y)u=f(x,y)\,, \tag{1}$$

где $c(x,y)$, $f(x,y)$ — заданные функции.

Нелокальными условиями принято называть такие условия, которые задают некоторую связь между значениями искомого решения в различных точках границы, либо в точках границы и внутренних точках, либо только во внутренних точках области. Задачи с нелокальными условиями называются нелокальными задачами.

Нелокальные задачи с интегральными условиями для линейных уравнений в частных производных рассмотрены в работах [1–4].

Уравнение (1) по классификации работы [5] соответствует первому каноническому виду относительно старших производных, так как уравнение характеристик имеет одну трехкратную действительную характеристику.

Задача 1. Найти в области D непрерывное и ограниченное вместе с производной u_x решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0,y)=\varphi(y),\ 0\le y\le h\,, \tag{2}$$

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty\,, \tag{3}$$

$$\int_0^\alpha u(x,y)\,dx=E(y),\ 0\le y\le h,\ \alpha=const>0, \tag{4}$$

где $\varphi(y)$, $\tau(x)$, $E(y)$ — заданные функции, причем

$$c(x,y),\ f(x,y)\in C(\overline{D}),\ E(y),\ \varphi(y)\in C^1[0,h],\ \ \tau(x)\in C^3[0,+\infty)\,, \tag{5}$$

$$\int_0^\alpha \tau(x)\,dx=E(0),\ \ \tau(0)=\varphi(0). \tag{6}$$

Введя обозначение

$$u_x(x,y)=\vartheta(x,y) \tag{7}$$

уравнение (1) запишем в виде

$$\vartheta_{xx}-\vartheta_y=F(x,y)\,, \tag{8}$$

где $F(x,y)=f(x,y)-c(x,y)u$.

Пусть

$$u_x(0,y)=\theta(y)\,, \tag{9}$$

где $\theta(y)$ − пока неизвестная функция. Тогда, в силу обозначения (7), из условий (9) и (3), для $\vartheta(x,y)$ получаем краевые условия

$$\vartheta(0,y)=\theta(y),\ 0\le y\le h,\ \vartheta(x,0)=\tau(x),\ 0\le x<+\infty . \tag{10}$$

Решение задачи (8), (10) известно и представимо в виде [6]

$$\vartheta(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta+\int_0^{+\infty}G(x,y;\xi,0)\,\tau'(\xi)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}G(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi, \tag{11}$$

где $G(x,y;\xi,\eta)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}$ − функция Грина уравнения теплопроводности.

Учитывая обозначение $F(x,y)$, из (11) имеем:

$$u_x(x,y)=\Phi(x,y)+\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}G(x,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{12}$$

где $\Phi(x,y)=\int_0^{+\infty}G(x,y;\xi,0)\tau'(\xi)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi.$

Интегрируя уравнение (12) по x будем иметь:

$$u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\int_0^x ds\int_0^y G_\xi(s,y;0,\eta)\,\theta(\eta)d\eta-\int_0^x ds\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi \tag{13}$$

где $\Phi_0(x,y)=\varphi(y)+\int_0^x\Phi(s,y)ds$. Заметим, что

$$\int_0^x ds\int_0^y G_\xi(s,y;0,\eta)\,\theta(\eta)d\eta=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\theta(\eta)d\eta}{\sqrt{y-\eta}}-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta .$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$\begin{gathered}u(x,y)=\Phi_0(x,y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta-\\-\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}\left[c(\xi,\eta)\int_0^\alpha G(s,y;\xi,\eta)ds\right]u(\xi,\eta)d\xi.\end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда, используя условие (4), получим:

$$\begin{gathered}\int_0^y\frac{\theta(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta=E_1(y)+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y\theta(\eta)d\eta\int_0^\alpha G(s,y;0,\eta)ds-\\-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y d\eta\int_0^\alpha(\alpha-s)ds\int_0^{+\infty}G(s,y;\xi,\eta)c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi\equiv Q(y),\end{gathered} \tag{15}$$

где $E_1(y)=\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\left[E(y)-\int_0^\alpha\Phi_0(s,y)ds\right]$. Из условия согласования (6) имеем, что $E_1(0)=0$. Поэтому $Q(0)=0$. Вычислим производную:

$$\begin{gathered}Q'(y)=E_1'(y)+\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\theta(y)+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y G_s(\alpha,y;0,\eta)\theta(\eta)d\eta+\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^\alpha(\alpha-s)c(s,y)u(s,y)ds-\\-\frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha}\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty}[G(\alpha,y;\xi,\eta)-G(0,y;\xi,\eta)]c(\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi.\end{gathered}$$

Обращая уравнение (15), как интегральное уравнение Абеля, получим

$$\theta(y)=\theta_0(y)+\int_0^y H_1(y,\eta)\theta(\eta)d\eta+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha H_2(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+$$
$$+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} H_3(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{16}$$

где $H_1(y,\eta)=\dfrac{1}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}}+\dfrac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_\eta^y\frac{G_s(\alpha,t;0,\eta)}{\sqrt{y-t}}dt,\ H_2(y,\xi,\eta)=-\frac{2(\alpha-\xi)c(\xi,\eta)}{\alpha\sqrt{\pi(y-\eta)}},$

$$H_3(y,\xi,\eta)=-\frac{2c(\xi,\eta)}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_\eta^y\frac{G(\alpha,t;\xi,\eta)-G(0,t;\xi,\eta)}{\sqrt{y-t}}dt,\ \ \theta_0(y)=\frac{1}{\pi}\int_\eta^y\frac{E_1'(t)}{\sqrt{y-t}}dt.$$

Заметим, что

$$\left|H_1(y,\eta)\right|\le\frac{C_1}{\sqrt{y-\eta}},\ \ \left|H_2(y,\xi,\eta)\right|\le\frac{C_2}{\sqrt{y-\eta}},$$

$$\left|H_3(y,\xi,\eta)\right|\le\frac{C_3}{\sqrt{y-\eta}},\ 0\le x\le\beta,\ \ \beta>>0,\ \left|H_3(y,\xi,\eta)\right|\le\frac{C_4}{\sqrt{y-\eta}}e^{-\frac{\xi^2}{4(y-\eta)}},\ x>\beta\,.$$

Обращая уравнение (16) относительно $\theta(y)$, как интегральное уравнение Вольтерра второго рода со слабой особенностью, имеем

$$\theta(y)=\theta_1(y)+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha T_1(y,\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} T_2(y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{17}$$

где $T_1(y;\xi,\eta)=H_2(y;\xi,\eta)+\displaystyle\int_\eta^y R(y,t)H_2(t;\xi,\eta)\,dt,$

$$T_2(y;\xi,\eta)=H_3(y;\xi,\eta)+\int_\eta^y R(y,t)H_3(t;\xi,\eta)\,dt,\ \ \theta_1(y)=\theta_0(y)+\int_0^y R(y,t)\,\theta_0(t)dt.$$

Подставляя значение $\theta(y)$ из (17) в (14) получим

$$u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\int_0^y d\eta\int_0^\alpha K_1(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi+\int_0^y d\eta\int_0^{+\infty} K_2(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi, \tag{18}$$

где

$$K_1(x,y;\xi,\eta)=\int_\eta^y H(x,y;s)T_1(s;\xi,\eta)ds,\ \ H(x,y;s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-s)}}-G(x,y;0,s)$$

$$K_2(x,y;\xi,\eta)=c(\xi,\eta)\int_0^x G(s,y;\xi,\eta)ds+\int_\eta^y H(x,y;s)T_2(s;\xi,\eta)ds,$$

$$\Phi_1(x,y)=\Phi_0(x,y)+\int_0^y H(x,y;s)\,\theta_1(s)ds,.$$

Уравнение (18) представляет собой интегральное уравнение типа Вольтера второго рода, существование единственного решения которого доказано методом последовательных приближений.

Таким образом, имеет место

Теорема. Если выполнены условия (5) и (6), то существует единственное непрерывное и ограниченное решение задачи 1.

Литература

1. *Cannon J.R*. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Apple. Math. – 1963. – V. 21. – P. 155–160.
2. *Жестков С.В*. О задаче Гурса с интегральными краевыми условиями // Украинск. матем. журнал. – 1990. – Т. 42. – № 1. – С. 132–135.
3. *Пулькина Л.С*. Смешанная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74. – Вып. 3. – С. 435–435.
4. *Бейлина Н.В*. Нелокальная задача с интегральными уравнениями для псевдогиперболического уравнения // Вестник Сам ГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – № 2 (61). – С. 22–28.
5. *Джураев Т.Д., Попелек Я*. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
7. *Камынин Л.И*. Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами // Сибирский матем. журнал. – 1963. – Т. IV. – № 5. – С. 1071–1105.