

УДК 517.95 (575.2) (04)

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ПЕРЕХОДА**

А.Б. Осмоналиев

Исследована краевая задача для смешанно-гиперболических уравнений 4-го порядка с постоянными коэффициентами с характеристической линией перехода. Найдены достаточные условия существования единственного решения и приведены примеры.

Ключевые слова: функция Римана; условия согласования; существование и единственность решения.

Пусть область D представляет собой прямоугольник с вершинами $A_0(0, h_1), B_0(\ell, h_1), B_1(\ell, -h_2), A_1(0, -h_2)$, а D_1 и D_2 являются частями этой области, определяемые как $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $(\ell, h_1, h_2 > 0)$.

Введем класс функций:

$$M = \{u(x, y) : u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D), u(x, y) \in C^2(D_1),$$

$$u(x, y) \in C^2(D_2), u_{xyxy}(x, y) \in C(D)\}.$$

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ из класса M , удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$u_{xyxy}(x, y) - bu_{yy}(x, y) = f_1(x, y), \quad b - const, \quad (1)$$

и граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(\ell, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h_1, \quad (2)$$

$$u(x, h_1) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

а в области D_2 — уравнению

$$u_{xyxy}(x, y) + du(x, y) = f_2(x, y), \quad d - const, \quad (4)$$

и граничным условиям

$$u(0, y) = \varphi_3(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_4(y), \quad -h_2 \leq y \leq 0, \quad (5)$$

$$u(x, -h_2) = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (6)$$

где $\varphi_i(y) (i=1..4), \psi_j(x), f_j(x, y) (j=1, 2)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_3(0), \quad \varphi_1(h_1) = \psi_1(0), \quad \varphi_3(-h_2) = \psi_2(0), \quad \psi_2'(0) = \varphi_4(-h_2). \quad (7)$$

Согласно постановке задачи введем следующие обозначения:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (8)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ — пока неизвестные функции, причем в силу (7) для них должны быть выполнены следующие условия согласования:

$$\tau(0) = \varphi_3(0), \quad \tau'(\ell) = \varphi_4(\ell), \quad \nu(0) = \varphi_3'(0), \quad \nu'(\ell) = \varphi_4'(\ell), \quad \tau(\ell) = \varphi_2(\ell). \quad (10)$$

Для решения задачи 1 воспользуемся результатами следующих задач.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению (1) и условиям (2), (3) и (8).

В работе [1] показано, что задача 2 имеет единственное решение и оно в случае $b > 0$ представляется в следующем виде:

$$u(x, y) = \cos(\sqrt{bx})\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{bx})\chi_1(y) - \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x \sin[\sqrt{b}(\xi-x)](\tau''(\xi) + b\tau(\xi))d\xi - \\ - \frac{y}{\sqrt{b}}\int_0^x \sin[\sqrt{b}(\xi-x)](\chi_2''(\xi) + b\chi_2(\xi))d\xi + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x \int_0^y (\eta-y)\sin[\sqrt{b}(\xi-x)]f_1(\xi, \eta)d\xi d\eta, \quad (11)$$

где $\chi_1(y)$ и $\chi_2(x)$ являются решениями следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \chi_1(y) = \Phi_1(y) + \frac{y}{\sin(\sqrt{b}l)}\int_0^l \sin[\sqrt{b}(\xi-l)](\chi_2''(\xi) + b\chi_2(\xi))d\xi, \\ \int_0^x \sin[\sqrt{b}(\xi-x)](\chi_2''(\xi) + b\chi_2(\xi))d\xi = \Phi_2(x), \end{cases} \quad (12)$$

в которой

$$\Phi_1(y) = \frac{\sqrt{b}}{\sin(\sqrt{b}l)}[\varphi_2(y) - \cos[\sqrt{b}l]\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{b}}\sin[\sqrt{b}l]\varphi_4(0) - \varphi_2(0) + \cos[\sqrt{b}l]\varphi_1(0) - \\ - \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^l d\xi \int_0^y (\eta-y)\sin[\sqrt{b}(\xi-l)]f_1(\xi, \eta)d\eta], \quad \Phi_2(x) = \frac{\sqrt{b}}{h_1}\tau(x) + F_1(x) \quad (13)$$

где

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{b}}{h_1}[-\psi_1(x) + \cos(\sqrt{b}x)\varphi_1(h_1) + \frac{1}{\sqrt{b}}\sin(\sqrt{b}x)\psi_1'(0) - \\ - \frac{1}{\sqrt{b}}\sin[\sqrt{b}x]\varphi_4(0) - \cos[\sqrt{b}x]\varphi_1(0) + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x d\xi \int_0^{h_1} (\eta-h_1)\sin[\sqrt{b}(\xi-x)]f_1(\xi, \eta)d\eta].$$

Тогда решение (11) можем переписать в виде

$$u(x, y) = \left[1 - \frac{y}{h_1}\right]\tau(x) + F_2(x, y), \quad (14)$$

где уже $\chi_1(y) = \Phi_1(y) + \frac{y}{\sin(\sqrt{b}l)}\Phi_2(l)$,

$$F_2(x) = \cos[\sqrt{b}x]\varphi_1(y) + \frac{1}{\sqrt{b}}\sin[\sqrt{b}x]\chi_1(y) - \frac{1}{\sqrt{b}}\sin[\sqrt{b}x]\varphi_4(0) - \\ - \cos[\sqrt{b}x]\varphi_1(0) - \frac{y}{\sqrt{b}}F_1(x) + \frac{1}{\sqrt{b}}\int_0^x \int_0^y (\eta-y)\sin[\sqrt{b}(\xi-x)]f_1(\xi, \eta)d\xi d\eta.$$

Теперь рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Найти $u(x, y)$, удовлетворяющую в области D_2 уравнению (4) и условиям (5), (8) и (9).

Согласно работе [2] решение этой задачи представляется в виде

$$u(x, y) = \int_0^x \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, y; \xi, 0)\nu(\xi)d\xi + \int_0^x \mathcal{G}_{2\eta\xi\xi}(x, y; \xi, 0)\tau(\xi)d\xi + \\ + y\nu(x) - \tau(x) + F_3(x, y), \quad (15)$$

где

$$F_3(x, y) = \mathcal{G}_{2\eta\xi}(x, y; 0, y)\varphi_3(y) - \mathcal{G}_{2\eta}(x, y; 0, y)\varphi_4(y) + \\ + \int_0^y [\mathcal{G}_{2\eta\eta}(x, y; 0, \eta)\varphi_4(\eta) - \mathcal{G}_{2\eta\eta\xi}(x, y; 0, \eta)\varphi_3(\eta)] d\eta + \int_0^x \int_0^y \mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta) f_2(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ - \mathcal{G}_2(x, y; 0, 0)\varphi_4'(0) + \mathcal{G}_{2\xi}(x, y; 0, 0)\varphi_3'(0) - \mathcal{G}_{2\eta}(x, y; 0, 0)\varphi_4(0) + \mathcal{G}_{2\eta\xi}(x, y; 0, 0)\varphi_3(0),$$

$$a \mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n d^n}{[(2n+1)!]^2} (\xi - x)^{2n+1} (\eta - y)^{2n+1} \quad (16)$$

– функция Римана [3] для уравнения (4).

Из (14) вычислив $u_y(x, y)$ при $y = 0$ имеем:

$$v(x) = -\frac{1}{h_1} \tau(x) + F_{2y}(x, 0), \quad (17)$$

а из (15) используя условие (6) и равенство (17) получим:

$$\left(\frac{h_2}{h_1} - 1\right) \tau(x) + \int_0^x K(x, \xi) \tau(\xi) d\xi = P(x), \quad (18)$$

где $K(x, \xi) = \mathcal{G}_{2\eta\xi\xi}(x, -h_2; \xi, 0) - \frac{1}{h_1} \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, -h_2; \xi, 0)$,

$$P(x) = \int_0^x \mathcal{G}_{2\xi\xi}(x, -h_2; \xi, 0) F_{2y}(\xi, 0) d\xi - h_2 F_{2y}(x, 0) + F_3(x, -h_2) - \psi_2(x).$$

Если $\frac{h_2}{h_1} \neq 1$, то равенство (19) как уравнение Вольтерра 2-го рода всегда имеет единственное ре-

шение. А если $\frac{h_2}{h_1} = 1$, то дважды дифференцируя обе части уравнения (18) вновь получим уравнение Вольтерра 2-го рода.

Таким образом, неизвестная функция $\tau(x)$ найдена, тогда $v(x)$ легко может быть определена по равенству (18).

Итак, доказана

Теорема. Если $\varphi_i(y) \in C[0, h_1]$ ($i = 1, 2$), $\varphi_j(y) \in C[-h_2, 0]$ ($j = 3, 4$), $\psi_k(x) \in C[0, \ell]$ ($k = 1, 2$) и выполнены условия (7), (10), то решение задачи 2 в классе M существует, единственно и определяется в областях D_1 и D_2 по формулам (14) и (15) соответственно.

Пример. Пусть в области $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, представляющей квадрат с вершинами $A_0(0, 1), B_0(1, 1), B_1(1, -1), A_1(0, -1)$ и состоящей из подобластей $D_1 = D \cap (y > 0)$, и $D_2 = D \cap (y < 0)$, требуется найти функцию $u(x, y) \in M$, удовлетворяющую в области D_1 уравнению

$$u_{xxy}(x, y) + u_{yy}(x, y) = y,$$

и краевым условиям

$$u(0, y) = y, \quad u(1, y) = 2^y, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad u(x, h_1) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

а в области D_2 уравнению $u_{xxy}(x, y) = 4$

и краевым условиям

$$u(0, y) = y^2, \quad u_x(0, y) = y^3, \quad -1 \leq y \leq 0, \\ u(x, -1) = 1 - x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

Единственное решение этой задачи представляется в области D_1 в виде

$$u(x, y) = y \cos(x) + \frac{\sin x}{\sin 1} \left[2^y - y \cos 1 - \frac{1}{6} y^3 + y^3 \cos 1 - 1 \right] + y \frac{\sin x}{\sin 1} \left[\cos 1 + \sin 1 - \frac{1}{6} \cos 1 - \frac{5}{6} \right] + \tau(x) - y \left[\cos x + \sin x + \tau(x) - \frac{1}{6} \cos x - x - \frac{5}{6} \right] + \frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{6} y^3 \cos x,$$

а в области D_2 в виде $u(x, y) = y^2 + y^3 x + \tau(x) + y v(x) + y^2 x^2$,

где неизвестные функции $\tau(x)$ и $v(x)$ определяются следующим образом

$$\tau(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \cos x + \ln 2 \frac{\sin x}{\sin 1} - \frac{1}{6} \sin x \operatorname{ctg} 1 - \frac{5 \sin x}{6 \sin 1} + x + \frac{5}{6} - x^2 \right],$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \cos x + \ln 2 \frac{\sin x}{\sin 1} - \frac{1}{6} \sin x \operatorname{ctg} 1 - \frac{5 \sin x}{6 \sin 1} + x + \frac{5}{6} + x^2 \right].$$

Легко можно проверить, что найденное решение удовлетворяет всем требованиям поставленной задачи.

Литература

1. *Осмоналиев А.Б.* Задача Дирихле для одного уравнения четвертого порядка гиперболического типа // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., механика, информатика. – Алматы, 2004. – № 2(41). – С. 19–26.
2. *Осмоналиев А.Б.* Краевые задачи для гиперболических и смешанных парабола-гиперболических уравнений четвертого порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2007. – 21 с.
3. *Джураев Т.Д., Согуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.