УДК 517.9 (575.2) (04)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ РЕАГИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д.А. Искендерова, А.М. Токторбаев

Исследуется задача Коши для уравнений, описывающих течение реагирующей смеси газов в пористой среде. В начальный момент времени все характеристики среды известны и имеют разные пределы на бесконечности. Доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения проводится методом априорных оценок.

Ключевые слова: плотность, удельный объем, температура, концентрация компонент, апроиорные оценки, пористость среды.

1. Постановка задачи и основной результат. Система уравнений, описывающая течение реагирующей смеси газов с учетом пористости среды имеет вид [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \mathrm{v} = \frac{1}{\rho},$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\chi}{\mathrm{v}}\frac{\partial c}{\partial x} \right) - c\, g,\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\theta}{\mathrm{v}} \right) - \beta(x)\, |u|^{\alpha} u, \qquad (1)\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_1}{\mathrm{v}}\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda_2}{\mathrm{v}}\theta\frac{\partial c}{\partial x} \right) - r\frac{\theta}{\mathrm{v}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{\mathrm{v}}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta\, c\, g.
\end{aligned}
$$

В предположении постоянства положительных коэффициентов $\chi,\ \mu,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \delta,\ r$ система уравнений (1) является замкнутой относительно неизвестных функций $\rho,\ c,\ u,\ \theta$. $\beta(x)$ – коэффициент проницаемости – непрерывная, неотрицательная, ограниченная функция и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \beta(x)dx \le C$; $0 \le \alpha \le 1$.

Рассмотрим движение смеси в полосе: $\Pi = \{\, (x,t):\ x \in R,\ \ 0 < t < T \,\}$, $R = (\,-\infty,\ \infty\,)$.

Начальные условия записываются в виде:

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0(x), \quad c\big|_{t=0} = c_0(x), \quad \mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \qquad (2)$$

$0 < c_0(x) \le 1,\ \ 0 < m_0 \le \left(\mathrm{v}_0(x), \theta_0(x)\right) \le M_0 < \infty$ и имеют конечные пределы на бесконечности:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = u_0^1, \quad \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = u_0^2, \quad u_0^1 < u_0^2,\\
&\lim_{x\to-\infty} \mathrm{v}_0(x) = \mathrm{v}_0^1, \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{v}_0(x) = \mathrm{v}_0^2, \quad \mathrm{v}_0^1 \ne \mathrm{v}_0^2, \qquad (3)\\
&\lim_{x\to-\infty} c_0(x) = c_0^1, \quad \lim_{x\to+\infty} c_0(x) = c_0^2, \quad c_0^1 \ne c_0^2,\\
&\lim_{x\to-\infty} \theta_0(x) = \theta_0^1, \quad \lim_{x\to+\infty} \theta_0(x) = \theta_0^2, \quad \theta_0^1 \ne \theta_0^2.
\end{aligned}
$$

Введем вспомогательные функции $\psi(x),\ f(x),\ \gamma(x),\ \phi(x)$, обладающие свойствами:

$$
\begin{aligned}
&0 < C_1^{-1} < \psi(x) < C_1, \quad \lim_{|x|\to\infty} \mathrm{v}_0(x)\ \psi(x) = 1, \quad \psi'(x) \in W_2^1(R),\\
&|f(x)| < C_2 < \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = u_0^1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = u_0^2,\\
&0 < f'(x) \le C_3, \quad f'(x) \in W_2^1(R), \quad f'(x) \in L_1(R), \qquad (4)\\
&0 < C_4^{-1} < \phi(x) < C_4, \quad \lim_{|x|\to\infty} \theta_0(x)\phi(x) = 1, \quad \phi'(x) \in W_2^1(R),\\
&1 \le \gamma(x) < C_5 < \infty, \quad \lim_{|x|\to\infty} c_0(x)\gamma(x) = 1, \quad \gamma'(x) \in W_2^1(R).
\end{aligned}
$$

$$\left(\phi'(x)\right)^2 < \delta f'(x), \quad 0 < \delta < 1. \qquad (5)$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

Теорема. *Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и* $(u_0 - f,\ \ \mathrm{v}_0\psi - 1,\ \ \theta_0\phi - 1,\ \ c_0\gamma - 1) \in W_2^1(R)$.

Функция $g(\rho, c, \theta)$ является положительной и непрерывной в любой компактной области своих аргументов, а по $(\phi\theta)^{1/2}$, кроме того, удовлетворяет условию Липшица и $g(\rho, c, 1) = 0$.

Тогда в полосе $\Pi = R \times (0, T)$ с произвольной конечной высотой T, $0 < T < \infty$ существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2), причем

$$(\mathrm{v}\psi - 1) \in L_\infty\left(0, T; W_2^1(R)\right), \qquad \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}, \right) \in L_2(\Pi),$$

$\left(u-f,\ \ \theta\phi-1,\ \ c\gamma-1\right)\in L_{\infty}\left(0,T;W_2^1\left(R\right)\right)\cap L_2\left(0,T;W_2^2\left(R\right)\right),$

$0<c\left(x,t\right)\le 1,\ \ \mathrm{v}\left(x,t\right),\ \ \theta\left(x,t\right)$ *– строго положительные, ограниченные функции.*

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме: а) выводятся глобальные априорные оценки, положительные постоянные $C,\ \ C_i,\ \ N_i,\ \ K_i$ в которых зависят только от данных задачи и величины T интервала времени, но не зависят от промежутка существования локального решения; б) доказывается локальная теорема существования аналогично [1]; в) на основе полученных глобальных априорных оценок локальное решение продолжается на весь промежуток времени $\left[0,T\right],\quad 0<T<\infty$. Известно, что в одномерных нестационарных задачах вязкой газовой динамики априорные оценки удобнее всего получать в лагранжевых координатах. Введение их описано в [1].

2. Априорные оценки. Не ограничивая общности, примем все положительные постоянные в системе (1), равными единице. Из уравнений системы (1) и ограничений на данные задачи видно, что функции $\mathrm{v}\left(x,t\right),\ \ \theta\left(x,t\right)$ неотрицательны и $0<c\left(x,t\right)\le 1$.

Выведем закон сохранения. Сделаем замену, полагая $\dfrac{\partial\,\xi}{\partial\,x}=\dfrac{1}{\phi\left(x\right)\gamma\left(x\right)}$. Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\,\mathrm{v}}{\partial\,t}-\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial\,u}{\partial\,\xi}=0\,,\qquad \mathrm{v}=\frac{1}{\rho},\\
&\frac{\partial\,c}{\partial\,t}=\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\frac{1}{\phi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial\,c}{\partial\,\xi}\right)-c\,g,\\
&\frac{\partial\,u}{\partial\,t}=\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\frac{1}{\phi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial\,u}{\partial\,\xi}\right)-\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial\,p}{\partial\,\xi}-\beta\left(x\right)\,\left|u\right|^{\alpha}u\,,\quad p=\frac{\theta}{\mathrm{v}}\,,\\
&\frac{\partial\,\theta}{\partial\,t}=\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\frac{1}{\phi\gamma\mathrm{v}}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,\xi}\right)+\frac{1}{\phi\gamma}\frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\frac{1}{\phi\gamma\mathrm{v}}\theta\frac{\partial\,c}{\partial\,\xi}\right)-\frac{1}{\phi\gamma}p\frac{\partial\,u}{\partial\,\xi}+\frac{1}{\phi^2\gamma^2\mathrm{v}}\left(\frac{\partial\,u}{\partial\,\xi}\right)^2+cg.
\end{aligned}\tag{6}$$

Лемма. При выполнении условий теоремы справедлива оценка

$$U\left(t\right)+\int_0^t W\left(\tau\right)\,d\tau\ \le\ E=const>0\,,\quad t\in\left[0,T\right]\tag{7}$$

где $U\left(t\right)=\int\left\{\frac{1}{2}\left(u-f\right)^2+\frac{1}{2}\left(c\gamma-1\right)^2+\left(\phi\theta-\ln\phi\theta-1\right)+\left(\mathrm{v}\psi-\ln\mathrm{v}\psi-1\right)\right\}dx$,

$$W\left(t\right)=\int\left\{\frac{\theta_x^2}{\mathrm{v}\theta^2}+\frac{u_x^2}{\mathrm{v}\theta}+\frac{c_x^2}{\mathrm{v}}+\frac{\theta}{\mathrm{v}}f'+g\phi\left(c\gamma-1\right)^2+\beta\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha}\left(u-f\right)^2\right\}dx\,.$$

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (6) на $\gamma\left(\psi-\dfrac{1}{\mathrm{v}}\right)$, второе на $\gamma\left(c\gamma-1\right)$, третье на $\phi\gamma\left(u-f\right)$, четвертое на $\gamma\left(\phi-\dfrac{1}{\theta}\right)$, сложим и проинтегрируем по R:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{2}\phi\gamma\left(u-f\right)^2+\frac{1}{2}\left(c\gamma-1\right)^2+\gamma\left(\phi\theta-\ln\phi\theta-1\right)+\gamma\left(\mathrm{v}\psi-\ln\mathrm{v}\psi-1\right)\right\}d\xi\ +\\
&+\int\left\{\frac{\theta_\xi^2}{\mathrm{v}\theta^2\phi^2\gamma}+\frac{u_\xi^2}{\mathrm{v}\theta\,\phi\gamma}+\frac{c_\xi^2}{\mathrm{v}\,\phi^2\gamma}+\frac{\theta}{\mathrm{v}}f'+g\left(c\gamma-1\right)^2+\phi\beta\left(x\right)\left|u\right|^{\alpha}\left(u-f\right)^2\right\}d\xi\ =
\end{aligned}\tag{8}$$

$$= \int \frac{\psi}{\varphi\gamma} u_\xi d\xi + \int \frac{1}{\varphi \mathrm{v} \gamma} u_\xi \left(f' + \gamma - 1\right) d\xi - \int \frac{\theta_\xi \varphi'}{\mathrm{v}\, \theta\, \varphi^3 \gamma} d\xi - \int \frac{c_\xi c \gamma'}{\mathrm{v}\, \varphi^2 \gamma} d\xi + \int \frac{c_\xi c \varphi'}{\mathrm{v}\, \varphi^3} d\xi +$$

$$+ \int \frac{c_\xi \theta_\xi}{\mathrm{v}\, \theta \phi^2 \gamma} d\xi + \int \frac{c_\xi \phi'}{\mathrm{v}\, \phi^3 \gamma} d\xi - \int g\left(c\gamma - 1\right) d\xi + \int cg\gamma \frac{\phi\theta - 1}{\theta} d\xi + \int \beta\left(\xi\right) \left|u\right|^\alpha f\left(u - f\right) \phi \, d\xi = \sum_{k=1}^{10} I_k$$

Оценим каждое I_k, используя интегрирование по частям, неравенства Юнга, Коши, Гельдера, вложения. Интегрируя по времени полученное из (8) неравенство и применяя лемму Гронуолла, переходя к исходным переменным, выводим оценку (7). Лемма доказана.

Рассуждая аналогично, можно получить все оценки, необходимые для доказательства существования обобщенного решения. Единственность доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух совместных решений аналогично [4, 5].

Теорема полностью доказана.

Литература

1. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
2. *Искендерова Д.А.* Задача Коши для уравнений течения реагирующей смеси газов // Вестн. Казахск. гос. нац. ун-та. Сер. мат., мех., информатики. – 1998. – №9. – С. 77–92.
3. *Искендерова Д.А., Токторбаев А.М.* Разрешимость уравнений реагирующей смеси газов в неограниченной области // Тр. VI совещания Российско-Казахстанской рабочей группы по вычисл. и информ. технологиям. – Алматы, 2009. – С. 183–190.