УДК 512.1

МОДНАЯ ФОРМУЛА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Одной из самых популярных формул в школьном курсе математики является формула для разности квадратов. Эта формула часто позволяет упростить процесс вычисления различных числовых и алгебраических выражений. В данной работе показано, как с помощью формулы для разности квадратов можно решать задачи, которые обычно сводятся к решению квадратных уравнений. Для этого используется подстановка, известная математикам древности. В частности, ею пользовался выдающийся среднеазиатский математик Аль Хорезми, с именем которого непосредственно связаны два основных математических слова: алгебра и алгоритм.

Ключевые слова: разность квадратов; квадратные уравнения; новый способ решения; Диофант; Аль Хорезми; текстовые задачи.

МОДАЛУУ ФОРМУЛА

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Мектеп математикасында абдан кеңири колдонулган формулалардын бири - бул квадраттардын айырмасынын формуласы. Бул формула көп учурда ар кандай сандык жана алгебралык туюнтмаларды эсептөөнү жеңилдетет. Сунуш кылынып жаткан макалада, адатта, квадраттык теңдемелерге алып келип, андан кийин чыгарылуучу маселелерди, квадраттардын айырмасынын формуласынын жардамы менен чыгаруу ыкмасы көрсөтүлгөн. Ал үчүн байыркы математиктер колдонуп жүргөн өзгөрмөлөрдү алмаштыруу пайдаланылат. Бул ыкманы Орто Азиялык математик Аль Хорезми да математикалык иштеринде колдончу. Айта кетчү нерсе, математикалык эки негизги сөз - алгебра жана алгоритм Аль Хорезминин аты менен түздөн түз байланышкан:.

Түйүндүү сөздөр: квадраттардын айырмасы; квадраттык теңдемелер; чыгаруунун жаңы ыкмасы; Диофант; Аль Хорезми; тексттик маселелер.

THE MODE OF FORMULAS

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

One of the most popular formulas in the school math course is the formula for the difference of squares. This formula often allows you to simplify the process of calculating various numerical and algebraic expressions. This paper shows how to use the formula for the difference of squares to solve problems that usually come down to solving quadratic equations. To do this, use the substitution known to mathematicians of antiquity. In particular, it was used by the outstanding Central Asian mathematician Al Khorezmi, with whose name two basic mathematical words are directly connected: algebra and algorithm.

Keywords: Difference of squares; quadratic equations; a new method of solution; Diophantus; Al Khorezmi; text problems.

Возможно, стоило бы поинтриговать читателей и подольше не говорить о том, что мы имеем в виду, говоря о модной формуле. Но мы не будем этого делать, и сразу скажем, что речь идет о формуле сокращенного умножения:

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n).$$

Ее все знают, и в ее справедливости очень легко убедиться:

$\boldsymbol{(m + n)(m - n)} = m^2 - mn + nm - n^2 = \boldsymbol{m^2 - n^2}$.

Что значит «модная» формула? Дело в том, что в статистике модой называют наиболее часто встречающееся значение. Мы считаем, что формула для разности квадратов в математике встречается чаще всего. Поэтому, в знак нашего к ней уважения будем далее называть ее ФОРМУЛА. Некоторые могут не согласиться с этим мнением. Для того чтобы их переубедить, мы приготовили весомые аргументы. Они будут предъявлены далее.

1. Задача. *Вычислить значение выражения* $104^2 - 96^2$.

Решение.

На первый взгляд кажется, что это непростая задача. Нужно подсчитать значение первого квадрата, затем второго, и потом найти их разность.

На самом деле математики знают, что это очень просто. Воспользуемся ФОРМУЛОЙ:

$$104^2 - 96^2 = (104 + 96)(104 - 96) = 200 \cdot 8 = 1600.$$

2. Примерно также выглядит и следующая ситуация.

Задача. Вычислите $(6f + 9g)^2 - (6f - 9g)^2$ при $f = 2,\ g = 35$.

Решение.

Для того чтобы вычислить значение этого многочлена полезно использовать ФОРМУЛУ:

$$(6f + 9g)^2 - (6f - 9g)^2 = [(6f + 9g) - (6f - 9g)][(6f + 9g) + (6f - 9g)].$$

Далее, раскрыв круглые скобки, получим:

$$[6f + 9g - 6f + 9g)][6f + 9g + 6f - 9g] = [18g][12f] = 216fg.$$

Осталось подставить значения: $216fg = 216 \cdot 2 \cdot 35 = 15120$.

3. Скептикам уже пора начать возмущаться. «Стоило ли посвящать отдельную работу давно известным вещам?» Поэтому, не будем испытывать их терпение и «возьмем быка за рога».

Задача. *Площадь прямоугольника равна 99 м*^{2}. *Чему равны его стороны, если периметр равен 40 м?*

Решение.

Обозначим основание прямоугольника через а, высоту через h. Тогда, периметр прямоугольника будет равен $2a + 2h$, и, следовательно, $a + h = 20$;

$ah = 99$. «Сейчас вы скажете, что нужно выразить а: $a = 20 - h$, подставить в произведение $ah = 99$, и получить квадратное уравнение $(20 - h)h = 99$. Так это всем и давно известно» – продолжают скептики. Но в данном случае они не правы. Мы пойдем «другим путем» и воспользуемся методом, который восходит к древним, в частности, к великим математикам – Диофанту и Аль Хорезми [1].

Итак, нам нужно решить систему: $a + h = 20;\ ah = 99$. Для этого используем первое уравнение системы и введем новую переменную z, так, чтобы $a = 10 - z;\ h = 10 + z$. Тогда второе уравнение системы примет вид: $(10 - z)(10 + z) = 99$. Отсюда, по ФОРМУЛЕ

$$10^2 - z^2 = 99 \Rightarrow z^2 = 1.$$

Поэтому $z = 1$ и $a = 10 - 1 = 9;\ h = 10 + 1 = 11$. Таким образом, выяснилось, что прямоугольник имеет стороны длиной 9 и 11 метров.

4. Рассмотрим похожую ситуацию.

Задача. *Площадь прямоугольника равна 36 см*^{2}. *Чему равна его высота, если она короче основания на 5 см?*

Решение.

Обозначим основание прямоугольника через а, высоту через h. Тогда, имеет место система: $a - h = 5;\ ah = 36$. Для того чтобы решить систему тем же, что и в предыдущей задаче, способом, снова используем подстановку Диофанта-Аль Хорезми – предлагаем так ее называть в дальнейшем.

Итак, используем первое уравнение системы и введем новую переменную z, так, чтобы $a = 5/2 + z; -h = 5/2 - z$. Тогда, второе уравнение системы примет вид: $(2,5 + z)(2,5 - z) = -36$. Отсюда, по ФОРМУЛЕ

$(2,5)^2 - z^2 = -36 \Rightarrow z^2 = 6,25 + 36 \Rightarrow z^2 = 42,25$.

Таким образом, $z = 6,5$ и, соответственно, $a = 2,5 + 6,5 = 9$; $-h = 2,5 - 6,5 = -4$. Выяснилось, что этот прямоугольник имеет основание 9 см и высоту 4 см.

5. Надеемся, что Вы уже «входите во вкус».

Задача. *Площадь прямоугольника равна 105 мм². Чему равна его высота, если она равна четырем основаниям плюс один миллиметр?*

Решение.

Основание прямоугольника а и его высоту h связывает уравнение

$h = 4a + 1$. Итак, имеет место система $h - 4a = 1$; $ah = 105$. Подстановка Диофанта-Аль Хорезми позволяет записать: $h = 1/2 - z$; $-4a = 1/2 + z$. Тогда, из второго уравнения системы $-4a \cdot h = -4 \cdot 105 = -420$. Поэтому, из ФОРМУЛЫ: $(1/2 + z)(1/2 - z) = -420 \Rightarrow (1/2)^2 - z^2 = -420 \Rightarrow z^2 = 420,25$. Следовательно, $z = 20,5$ и, соответственно, $h = 0,5 - 20,5$. Ой, что-то пошло не так. Высота не может быть отрицательной. «Я же говорил» – скажет скептик, если такие еще сохранились. На самом деле ничего страшного не произошло.

При использовании подстановки Диофанта-Аль Хорезми, мы в одном случае вычитаем z, в другом его прибавляем. Оказывается, в зависимости от выбора, в соответствии с условиями задачи, в качестве нужного значения z следует выбирать положительное или отрицательное решение уравнения $z^2 =$ *(неотрицательное число)*.

В данном случае, достаточно взять $z = -20,5$ и все будет в порядке.

Тогда, $h = 0,5 - (-20,5) = 21; -4a = 1/2 + (-20,5) = -20$.

Следовательно, такой прямоугольник имеет основание 5 мм и высоту 21 мм. И эти значения полностью удовлетворяют условиям задачи.

6. Кто-то может подумать, что излагаемый подход годится только для геометрических задач. Конечно, это не так.

Задача. *Люция купила морковь на 4000 сомов. Кумен, обсуждая с нею покупку, сказал, что подобную покупку он сделал за 4620 сомов. При этом, он купил на 20 кг больше и заплатил за каждый кг на 1 сом больше. По какой цене Кумен купил морковь?*

Решение.

Как известно, стоимость покупки – выручка продавца – выражается формулой $R = pq$, где p – цена, q – объем покупки. Согласно условиям задачи имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} p \cdot q = 4000; \\ (p + 1) \cdot (q + 20) = 4620. \end{cases}$$

Первое уравнение системы описывает покупку Люции, второе – Кумена.

Раскрыв скобки во втором уравнении: $pq + q + 20p + 20 = 4620$, и заменив pq на его значение из 1-го уравнения, получим: $4000 + q + 20p + 20 = 4620$. Тогда, $q + 20p = 600$. Итак, исходная система равносильна системе $\begin{cases} p \cdot q = 4000; \\ q + 20p = 600. \end{cases}$ Из уравнения $q + 20p = 600$, согласно подстановке Диофанта-Аль Хорезми, получим: $q = 300 + z$; $20p = 300 - z$. Поэтому:

$(300 + z)(300 - z) = 20pq = 20 \cdot 4000 \Rightarrow (300)^2 - z^2 = 80000 \Rightarrow z^2 = 10000 =$

$=> z = -100$ и $z = 100$. Используем отрицательное значение z и получим:

$q = 300 + (-100) = 200$; $20p = 300 - (-100) = 400 => p = 20$.

Если же взять положительный z, то: $q = 300 + 100 = 400$; $20p = 300 - 100 = 200 => p = 10$.

В обеих случаях получаются разумные значения цены и объема покупки. Поэтому, для того чтобы однозначно ответить на вопрос, нужны дополнительные данные. А пока мы можем только сказать, что Кумен купил морковь или по 11 сомов за килограмм или по 21 сом/кг.

7. Было бы странно не рассмотреть задачу на движение.

Задача. *Паша прошел 3 километра по шоссе и 10 км – по тропинке, затратив на весь путь 3 часа. По шоссе он шел со скоростью на 2 км/час большей, чем по тропинке. С какой скоростью Паша шел по шоссе?*

Решение.

Обозначив через t время, затраченное на ходьбу по шоссе, получим, что по тропинке Паша шел $3 - t$ часов. Далее, обозначив через v скорость ходьбы по шоссе, получим, что скорость ходьбы по тропинке равна $v - 2$. Таким образом, имеет место система:

$$\begin{cases} v \cdot t = 3; \\ (v - 2) \cdot (3 - t) = 10. \end{cases}$$

Из 2-го уравнения системы, раскрыв скобки, получим: $3v - vt - 6 + 2t = 10$ и, заменив vt на его значение из 1-го уравнения, получим: $3v - 3 + 2t = 16$. То есть, $3v + 2t = 19$. Применим подстановку Диофанта-Аль Хорезми, и получим: $3v = 19/2 + z$; $2t = 19/2 - z$. Поэтому, из первого уравнения системы и ФОРМУЛЫ:

$(9{,}5 + z)(9{,}5 - z) = 3v\cdot 2t = 6\cdot 3 => (9{,}5)^2 - z^2 = 18 => z^2 = 72{,}25 => z = \pm 8{,}5$.

Используем отрицательное значение z: $3v = 9{,}5 + (-8{,}5) => v = 1/3$; $2t = 9{,}5 - (-8{,}5) => t = 9$.

Для положительного значения z: $3v = 9{,}5 + 8{,}5 => v = 6$; $2t = 9{,}5 - 8{,}5 => t = 1$.

На первый взгляд подходят оба значения скорости. Но, так как скорость по тропинке на 2 км/час меньше, первый корень является посторонним. Следовательно, Паша шел по шоссе со скоростью *6 км/час*, а по тропинке со скоростью: *6 – 2 = 4 км/ч.*

8. Пора формализовать алгоритм решения задач при помощи подстановки Диофанта-Аль Хорезми и формулы разности квадратов.

Для того чтобы решить систему

$$\begin{cases} px + qy = r; \\ x \cdot y = s \end{cases} \qquad (*)$$

относительно неизвестных x и y, нужно:

- воспользоваться подстановкой Диофанта-Аль Хорезми и записать

  $px = r/2 - z$; $qy = r/2 + z$;

- из уравнения $xy = s$ получить, что $px\cdot qy = (r/2 - z)(r/2 + z) = p\cdot q\cdot s$;
- из формулы разности квадратов получить, а затем решить уравнение

  $(r/2)^2 - z^2 = p\cdot q\cdot s$ относительно неизвестной z;

- использовать найденные значения z для определения x и y.

9. Используем указанный алгоритм в следующей ситуации.

Задача. *Азамат в прошлом году вырастил 800 тонн пшеницы. В этом году он собирается использовать семена более урожайного сорта, и надеется получить на 145 тонн больше, засеяв на 25* *га меньше. Сколько гектаров пшеницы собирается посеять Азамат, если он надеется вырастить с каждого гектара на 10 центнеров больше, чем в прошлом году?*

Решение.

Вначале нам нужно убедиться в том, что условия задачи на математическом языке можно записать в виде системы (*).

Как известно, в одной тонне десять центнеров. Поэтому, обозначив через p урожайность, а через q – количество гектаров, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} p \cdot q = 800; \\ (p+1)\cdot(q-25) = 945. \end{cases}$$

Первое уравнение системы описывает итоги прошлого года, второе – планы на этот год. Раскрыв скобки во втором уравнении: $pq + 1\cdot q - 25p - 25 = 945$, и заменив pq на его значение из первого уравнения, получим:

$800 + q - 25p - 25 = 945.$

Тогда, $q - 25p = 170.$

Итак, мы выяснили, что имеет место система:

$$\begin{cases} p \cdot q = 800; \\ q - 25p = 170. \end{cases}$$

Поэтому, можно воспользоваться подстановкой Диофанта-Аль Хорезми и записать:

$q = 85 - z$; $-25p = 85 + z$. При этом, $q(-25p) = -25pq = -20000.$

Тогда, $(85 - z)(85 + z) = (85)^2 - z^2 = -20000.$

Отсюда, $z^2 = 27225$ и затем $z = -165$. Из равенства $q = 85 - z$ понятно, что положительное значение z является посторонним корнем.

Осталось определить значения p и q: $q = 85 - (-165) = 250$; $-25p = 85 + (-165) => p = 3,2.$

Итак, выяснилось, что в прошлом году Азамат получил, в среднем, по 32 центнера с каждого из $800/3,2 = 250$ гектаров. Соответственно, в текущем году он собирается посеять пшеницу на $250 - 25 = 225$ гектарах.

10. Внимательный читатель мог заметить, что система (*) является обобщенным вариантом системы, которой, согласно теореме Виета, удовлетворяют корни приведенного квадратного уравнения. Напомним формулировку теоремы Виета: *Сумма корней приведенного квадратного уравнения* $x^2 + px + q = 0$ *равна* $-p$, *а произведение корней равно* q.

Поэтому, указанный выше алгоритм можно использовать при решении квадратных уравнений.

Например, согласно теореме Виета, корни уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 \cdot x_2 = 8. \end{cases}$$

Поэтому, использовав подстановку Диофанта-Аль Хорезми, запишем: $x_1 = 3 - z$; $x_2 = 3 + z$.

Тогда, $(3 - z)(3 + z) = (3)^2 - z^2 = 8$. Отсюда, $z^2 = 1 => z = 1$.

Осталось определить значения x_1 и x_2: $x_1 = 3 - 1 = 2$; $x_2 = 3 + 1 = 4$.

Нетрудно увидеть, что таким же образом можно решить и другие квадратные уравнения:

- корни уравнения $x - 6x + 9 = 0$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 \cdot x_2 = 9. \end{cases}$$

Поэтому, можно записать: $x_1 = 3 - z$; $x_2 = 3 + z$.

Тогда $(3 - z)(3 + z) = (3)^2 - z^2 = 9$. Отсюда, $z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$. Итак, уравнение имеет два совпадающих корня: $x_1 = 3 - 0 = 3$; $x_2 = 3 + 0 = 3$;

➢ корни уравнения $x^2 - 6x + 18 = 0$ удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6; \\ x_1 \cdot x_2 = 18. \end{cases}$$

Поэтому, можно записать: $x_1 = 3 - z$; $x_2 = 3 + z$.

Тогда $(3 - z)(3 + z) = (3)^2 - z^2 = 18$. Отсюда, $z^2 = -9 \Rightarrow z = 3i$. Это уравнение не имеет вещественных корней. Его корни: $x_1 = 3 - 3i$; $x_2 = 3 + 3i$.

Некоторые предлагают рассматривать метод, основанный на подстановке Диофанта-Аль Хорезми, главным при решении любых квадратных уравнений [2]. Мы не убеждены в правильности такого подхода. Например, при таком подходе придется повозиться, прежде чем найти корни уравнения $21x^2 - 11x - 10 = 0$. В то же время, прямой подстановкой несложно увидеть, что $x = 1$ является корнем уравнения $21x^2 - 11x - 10 = 0$. Поэтому, из теоремы Виета сразу получается, что вторым корнем этого уравнения является число $-10/21$, являющееся свободным членом приведенного уравнения $x^2 - (11/21)x - 10/21 = 0$.

Однако не стоит приуменьшать суперважность метода, основанного на подстановке Диофанта-Аль Хорезми. Задачи, разобранные в пунктах 3–7 и 9, а также огромное количество других задач показывают, что при их решении возникают системы вида (*). Как правило, для их решения рекомендуется переход к квадратным уравнениям [3, 4]. Аргументы, приведенные в данной работе, ратуют за прямое решение систем вида (*) при помощи подстановки Диофанта-Аль Хорезми.

11. Итак, если нам удастся уговорить математическую общественность широко использовать подстановку Диофанта-Аль Хорезми, то сомнений в том, что формула разности квадратов действительно является «модной», пожалуй, не останется. Для закрепления успеха предлагаем еще одну задачу, при решении которой ФОРМУЛА играет решающую роль.

Задача. *Длины сторон треугольника являются последовательными членами арифметической прогрессии. Вычислить разность длин отрезков между основанием высоты и вершинами средней стороны. Предполагаем, что высота лежит внутри треугольника [5].*

Решение.

Пусть задан треугольник ABC с высотой AH, где $|AB| = a - d$; $|BC| = a$; $|AC| = a + d$; $|BH| = x$; $|HC| = y$. По теореме Пифагора: $|AB|^2 - |BH|^2 = |AH|^2$ и $|AC|^2 - |HC|^2 = |AH|^2$. Поэтому, $(a - d)^2 - x^2 = (a + d)^2 - y^2$. Отсюда, $(a + d)^2 - (a - d)^2 = y^2 - x^2$. Думаем, что всем понятно, что настало время для ФОРМУЛЫ:

$$(a + d)^2 - (a - d)^2 = y^2 - x^2 \Rightarrow \Rightarrow [(a + d) - (a - d)][(a + d) + (a - d)] = [y - x][y + x] \Rightarrow\Rightarrow [2d][2a] = [y - x][y + x] \Rightarrow 4ad = [y - x][y + x].$$

Вспомним, что $y + x = |BC| = a$ и получим ответ: $y - x = 4d$.

Осталось не забыть в очередной раз восхититься красотой математического результата. Оказалось, что, например, если имеется треугольник со сторонами длиной 37; 40; 43, а также треугольник со сторонами длиной 97; 100; 103 и треугольник со сторонами длиной 997; 1000; 1003, для всех них разность длин отрезков, на которые высота «делит» среднюю сторону, будет равна $4 \cdot 3 = 12$.

Отметим, что, уточнив формулировку, можно снять условие о том, что высота должна лежать внутри треугольника.

Заключение. Выдающиеся математики древности оценили преимущества, которые предоставляет использование формулы разности квадратов. В частности, на использовании этой формулы основывается подстановка, которая позволяет эффективно решать задачи, которые обычно решаются путем сведения к квадратным уравнениям. Примеры, обосновывающие необходимость широкого распространения этого метода, который мы назвали подстановкой Диофанта-Аль Хорезми, составляют основную часть данной работы.

Литература

1. Новый метод решения квадратных уравнений. URL:https://youtu.be/ ZBalWWHYFQc (дата обращения: 9.01.2020).
2. Новый метод решения квадратных уравнений. Разные случаи. URL: https:// youtu.be/GtVt7lhPyOQ (дата обращения: 9.01.2020).
3. *Кыдыралиев С.К.* Живая математика. 7 класс / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: Солюшин, 2017. 336 с.
4. *Говоров В.М.* Сборник конкурсных задач по математике / В.М. Говоров, П.Т. Дыбов, Н.В. Мирошин, С.Ф. Смирнова. М.: Оникс 21 век, 2015. 480 с.
5. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад / И.Л. Бабинская. М.: Наука, 1975. 112 с.