УДК 511.1

НЕСТАРЕЮЩИЕ МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ. ЧАСТЬ 1

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Квадратная таблица, у которой сумма чисел, стоящих в каждом столбце, каждой строке и на обеих диагоналях всегда одна и та же, называется магическим квадратом. История магических квадратов насчитывает несколько тысячелетий. В данной работе мы говорим о некоторых общих методах построения магических квадратов нечетного порядка. Показано, что для построения бесконечного числа магических квадратов достаточно опираться на несколько квадратов, заполненных членами арифметической прогрессии. Обосновывается новый способ построения магических таблиц, использующий разбиение множества элементов арифметической прогрессии на несколько мини арифметических прогрессий.

Ключевые слова: магические квадраты; члены арифметической прогрессии.

КАРЫБАС СЫЙКЫРДУУ КВАДРАТТАР. 1-БӨЛҮК

Ар бир мамычасында, ар бир жолчосунда жана эки диагоналында турган сандардын суммасы дайыма бирдей болгон квадраттык таблицалар сыйкырдуу квадраттар деп аталат. Сыйкырдуу квадраттардын тарыхы көп кылымдан бери уланып келе жатат. Бул эмгекте биз так тартиптеги сыйкырдуу квадраттарды түзүүгө тиешелүү жалпы ыкмалар тууралуу сөз кылабыз. Сыйкырдуу квадраттардын чексиз санын түзүү үчүн арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү менен толтурулган бир нече сыйкырдуу квадраттарга таянышыбыз жетиштүү экендиги көрсөтүлгөн. Арифметикалык прогрессиянын көптөгөн элементтерин бир нече кичине арифметикалык прогрессияга бөлүп, сыйкырдуу квадраттарды түзүүнүн жаңы ыкмасы негизделет.

Түйүндүү сөздөр: сыйкырдуу квадраттар; арифметикалык прогрессиянын мүчөлөрү.

ETERNAL MAGIC SQUARES. PART 1

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

A square table, in which the sum of the numbers in each column, each row and on both diagonals is always the same, is called a magic square. The history of magic squares dates back several millennia. In this paper, we are talking about some common methods for constructing magic squares of odd order. It is shown that to build an infinite number of magic squares, it is enough to rely on several squares filled with members of an arithmetic progression. A new method for constructing magic tables is justified, using the partitioning of the set of elements of an arithmetic progression into several mini arithmetic progressions.

Keywords: magic squares; terms of arithmetic progression.

1. Магический квадрат – это квадратная таблица, у которой сумма чисел, стоящих в каждом столбце, каждой строке и на обеих главных диагоналях, всегда одна и та же.

В качестве примера приведем магический квадрат, составленный из простых чисел:

47	113	17
29	59	89
101	5	71

В данном случае магическая сумма равна:

$$47 + 113 + 17 = 47 + 29 + 101 = \dots$$
$$= 47 + 59 + 71 = 177.$$

«Я не знаю ничего более прекрасного в арифметике, чем эти числа, называемые некоторыми планетными, а другими – магическими», – писал про числа магического квадрата знаменитый французский математик Пьер де Ферма.

В древности магические квадраты очень уважали и приписывали им различные мистические свойства. Говорят, перед тем как приступить к какому-нибудь опасному делу, такие квадраты с магическими целями рисовали на бумажке и съедали. Такое же кушанье предлагали в качестве панацеи от всех болезней. Бытовало поверье, что выгравированный на серебре магический квадрат защищает от чумы.

2. Сейчас мы собираемся указать на общие принципы построения магических квадратов третьего порядка.

Начнем с самого простого: состоящего из 9 цифр: 0, 1, … , 8. Сумма членов этой простейшей арифметической прогрессии равна 36. Поэтому сумма чисел в каждой строке, столбце и, следовательно, диагонали должна быть равна 12.

Покажем, что в центре магического квадрата не может стоять 0. Итак, если 0 в центре, на одной из соседних клеток должна стоять 1:

1		
	0	

Тогда, для того чтобы сумма соответствующей тройки была равна 12, нужно добавить 11. Но мы строим таблицу из цифр, не превосходящих 8.

Также в центре не могут стоять ни 1, ни 2, ни 3, так как на одной из соседних клеток должен стоять 0. Дополняя такую пару цифр до 12, мы должны использовать число большее, чем 8. Например:

0		
	3	
		9

Точно так же можно показать, что в центре не могут стоять ни 5, ни 6, ни 7, ни 8. Дело в том, что любая пара этих цифр, в которую входит цифра 8, превосходит требуемую сумму – число 12.

Итак, в центре должна быть только цифра 4.

Теперь покажем, что число 8 не должно стоять в углу. Если оно там стоит, то

0		
	4	
		8

Для того чтобы получалась требуемая сумма – число 12, в одной строке с 8 должны стоять 1 и 3. Соответственно, для столбца осталась цифра 2, и что-то больше 4. А это нарушает магичность таблицы.

Итак, 8 не в углу.

	8	
	4	
	0	

С таким же успехом число 8 можно поставить в одну из остальных трех не угловых точек. Число 12 в первой строке получится только в том случае, если рядом с 8 стоят 1 и 3:

1	8	3
	4	
	0	

Здесь также заметим, что 1 и 3 можно поменять местами. С этого момента магический квадрат определен однозначно. Его мы получим, дополнив имеющиеся пары до троек с суммой 12:

1	8	3
	4	
5	0	7

И наконец,

1	8	3
6	4	2
5	0	7

Из замечаний, сделанных выше, следует, что квадрат останется магическим, если поворачивать его на 90 градусов. Например:

3	2	7
8	4	0
1	6	5

7	0	5
2	4	6
3	8	1

То же произойдет, если таблицу симметрично отразить относительно одной из диагоналей, например:

1	8	3
6	4	2
5	0	7

1	6	5
8	4	0
3	2	7

или второй строки, или второго столбца. Например:

1	8	3
6	4	2
5	0	7

5	0	7
6	4	2
1	8	3

Понятно, что магический квадрат останется магическим, если все элементы таблицы умножить на одно и то же число. Например:

$1\cdot5 = 5$	$8\cdot5 = 40$	$3\cdot5 = 15$
$6\cdot5 = 30$	$4\cdot5 = 20$	$2\cdot5 = 10$
$5\cdot5 = 25$	$0\cdot5 = 0$	$7\cdot5 = 35$

$1\cdot d = d$	8d	3d
6d	4d	2d
5d	$0\cdot d = 0$	7d

С тем же успехом, магичность сохранится, если ко всем числам магического квадрата добавить одно и то же число. Например:

5 + 17 = 22	40+17 = 57	15+17 = 32
30+ 17 = 47	20+17 = 37	10+17 = 27
25+17 = 42	0+ 17 = 17	35+17 = 52

$a_0 + d$	$a_0 + 8d$	$a_0 + 3d$
$a_0 + 6d$	$a_0 + 4d$	$a_0 + 2d$
$a_0 + 5d$	a_0	$a_0 + 7d$

Обобщив наблюдения, можем получить следующий интересный результат: Если имеет место магический квадрат*, то члены арифметической таблицы с номерами, равными числам таблицы, стоящие на соответствующих местах,* образуют магический квадрат.

Например, предыдущий магический квадрат позволяет предъявить такой магический квадрат:

$a_{22} = a_0 + 22d$	$a_{57} = a_0 + 57d$	$a_{32} = a_0 + 32d$
$a_{47} = a_0 + 47d$	$a_{37} = a_0 + 37d$	$a_{27} = a_0 + 27d$
$a_{42} = a_0 + 42d$	$a_{17} = a_0 + 17d$	$a_{52} = a_0 + 52d$

Взяв конкретные значения, например $a_0 = 130$, $d = -2$, получим числовой магический квадрат:

$a_{22} = 130 - 44 = 86$	$a_{57} = 130 - 114 = 16$	$a_{32} = 130 - 64 = 66$
$a_{47} = 130 - 94 = 36$	$a_{37} = 130 - 74 = 56$	$a_{27} = 130 - 54 = 76$
$a_{42} = 130 - 84 = 46$	$a_{17} = 130 - 34 = 96$	$a_{52} = 130 - 104 = 26$

3. Все магические квадраты, которые мы рассмотрели в этой работе, заполнены 9-ю числами, являющимися последовательными членами одной арифметической прогрессии. Напрашивается вопрос: «Бывают ли другие магические квадраты?» Для ответа на этот вопрос, давайте обратимся к одному из самых известных дошедших до нас магических квадратов – древнекитайской таблице Ло Шу (2200 лет до нашей эры):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

В этом магическом квадрате сумма чисел в каждой строке, столбце и диагонали равна 15. Согласно одной из легенд, прообразом Ло Шу стал узор из связанных черных и белых точек, украшавший панцирь огромной священной черепахи, всплывшей из вод реки Хуанхэ. Такой магический квадрат был у древних китайцев символом огромного значения. Цифра 5 в середине означала землю, а вокруг неё в строгом равновесии располагались огонь (2 и 7), вода (1 и 6), дерево (3 и 8), металл (4 и 9).

Запишем в порядке возрастания числа таблицы Ло Шу, разбив их на три группы: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*.

Обратившись к таблице Ло Шу, заметим, что в каждой строке и каждом столбце имеется ровно по одному числу из каждой группы. Например, в третьей строке: первое число 8 из третьей группы, второе число 1 – из первой, третье число 6 – из второй.

То же самое имеет место на одной из диагоналей: там стоят числа 8, 5, 2. И только на другой диагонали эта закономерность нарушается – на ней стоят только числа из второй группы: числа 4, 5, 6. Это исключение из правила позволяет сформулировать новое, очень интересное и важное правило:

Если от каждого числа, входящего в первую группу чисел магического квадрата, составленного из последовательных членов арифметической прогрессии, отнять одно и то же число, а к каждому числу, входящему в третью группу чисел, прибавить это же число, то получится другой магический квадрат*, с той же самой магической суммой.*

Давайте проверим это правило, взяв число 5.

4	9 + 5 = 14	2 – 5 = –3
3 – 5 = –2	5	7 + 5 = 12
8 + 5 = 13	1 – 5 = –4	6

Убедимся в справедливости правила для случая произвольной арифметической прогрессии:

$a_0 + d - A$	$a_0 + 8d + A$	$a_0 + 3d$
$a_0 + 6d + A$	$a_0 + 4d$	$a_0 + 2d - A$
$a_0 + 5d$	$a_0 - A$	$a_0 + 7d + A$

Следует заметить, что число A может быть и отрицательным. Приведем пример:

21 + 15 = 36	49 – 15 = 34	29
41 – 15 = 26	33	25 + 15 = 40
37	17 + 15 = 32	45 – 15 = 30

Понятно, что в результате вычитания и прибавления, исходная арифметическая прогрессия разобьётся на три минипрогрессии:

1) $(a_0 - A)$; $(a_0 - A) + d$; $(a_0 - A) + 2d$,
2) $a_0 + 3d$; $a_0 + 4d$; $a_0 + 5d$ и
3) $(a_0 + A) + 6d$; $(a_0 + A) + 7d$; $(a_0 + A) + 8d$.

При этом соответствующие члены этих минипрогрессий в свою очередь образуют арифметические прогрессии:

1) $(a_0 - A)$; $a_0 + 3d = (a_0 - A) + (A + 3d)$;
$(a_0 + A) + 6d = (a_0 - A) + 2(A + 3d)$,
2) $(a_0 - A) + d = (a_0 - A + d)$;
$a_0 + 4d = (a_0 - A + d) + (A + 3d)$;
$(a_0 + A) + 7d = (a_0 - A + d) + 2(A + 3d)$,
3) $(a_0 - A) + 2d = (a_0 - A + 2d)$;
$a_0 + 5d = (a_0 - A + 2d) + (A + 3d)$;
$(a_0 + A) + 8d = (a_0 - A + 2d) + 2(A + 3d)$.

Итак, мы показали, как, имея какой-нибудь магический квадрат, можно построить бесконечное множество других магических квадратов. Далее мы представим алгоритмы построения магических квадратов различных порядков.

4. Приведенный ниже метод замечателен тем, что позволяет построить магический квадрат любого нечетного порядка. Изложение метода начнем с таблицы третьего порядка. Построим числовой «ромб»:

		1		
	4		2	
7		5		3
	8		6	
		9		

Теперь числа, которые находятся вне таблицы 3×3, впишем в эту таблицу, «параллельно переместив через центр таблицы до ближайшей свободной клетки»:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

5. Несложно убедиться в том, что построение магических квадратов путем «вычитания и прибавления» становится весьма простым при использовании числового «ромба». Например:

		1 – 7 = –6		
	4		2 – 7 = –5	
7 + 7 = 14		5		3 – 7 = –4
	8 + 7 = 15		6	
		9 + 7 = 16		

Отсюда

4	16	–5
-4	5	14
15	-6	6

6. Таблицу порядка 5 построим так же, как и таблицу порядка 3:

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

Теперь числа, которые находятся вне таблицы 5×5, опять же впишем в эту таблицу, «параллельно переместив через центр таблицы до ближайшей свободной клетки»:

11_3	$\mathbf{24}_5$	7_2	$\mathbf{20}_4$	3_1
$\mathbf{4}_1$	12_3	$\mathbf{25}_5$	8_2	$\mathbf{16}_4$
17_4	$\mathbf{5}_1$	13_3	$\mathbf{21}_5$	9_2
$\mathbf{10}_2$	18_4	$\mathbf{1}_1$	14_3	$\mathbf{22}_5$
23_5	$\mathbf{6}_2$	19_4	$\mathbf{2}_1$	15_3

Думаем, что Вы догадались, что обозначают индексы при числах. Итак, члены арифметической прогрессии, которые заполняют магический квадрат можно разбить на пять групп: 1; 2; 3; 4; 5, 6; 7; 8; 9; 10, 11; 12; 13; 14; 15, 16; 17; 18; 19; 20 и 21; 22; 23; 24; 25. При этом в каждом столбце, каждой строке и на одной диагонали имеется по одному элементу из каждой группы. И только на другой диагонали стоят только элементы из третьей группы. Поэтому, добавляя (или вычитая) к числам одной группы одно и то же число так, чтобы сумма добавленных и вычтенных чисел была равна нулю, получим другой магический квадрат с исходной магической суммой.

Для примера, давайте вычтем из чисел первой группы число 1, второй группы – число 2, четвертой – число 4, а к числам пятой группы добавим 7, потому, что 1 + 2 + 4 = 7:

113	245 + 7 = 31	72 – 2 = 5	204 – 4 = 16	31 – 1 = 2
41 – 1 = 3	123	255 + 7 = 32	82 – 2 = 6	164 – 4 = 12
174 – 4 = 13	51 – 1 = 4	133	215 + 7 = 28	92 – 2 = 7
102 – 2 = 8	184 – 4 = 14	11 – 1 = 0	143	225 + 7 = 29
235 + 7 = 30	62 – 2 = 4	194 – 4 = 15	21 – 1 = 1	153

Действуя таким же образом, можно построить магический квадрат любого нечетного порядка, такой, что в каждом столбце, каждой строке и на одной диагонали будут по одному элементу из каждой группы (число элементов в группе равно порядку таблицы), и только на другой диагонали стоят только элементы из средней группы.

Далее, имея один магический квадрат, как было показано ранее, используя члены арифметической прогрессии, а также «прибавляя и вычитая», можно построить сколько угодно магических квадратов такого же порядка. Существуют и другие методы построения магических квадратов. О них можно узнать, обратившись к соответствующей математической литературе. Например, [1–7].

Литература

1. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка / Б.А. Кордемский. М.: Книга по требованию, 2012. 185 с.
2. *Постников М.М.* Магические квадраты / М.М. Постников М.: URSS, 2017. 88 с.
3. *Гуревич Е.* Я. Тайна древнего талисмана / Е.Я. Гуревич. М.: Наука, 1969.
4. *Гарднер М.* Математические досуги / М. Гарднер. М.: Мир, 1972.
5. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1989. 352 с.
6. *Чебраков Ю.В.* Теория магических матриц / Ю.В. Чебраков. СПб., 2008.
7. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Магический_квадрат (дата обращения: 02.11.2018).