

УДК 517.968.72

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЛИЯНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
НА ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси и стремления к нулю при неограниченном росте аргумента всех решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка типа Вольтерра в случае, когда соответствующее ему линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка может иметь неограниченные и не стремящиеся к нулю решения на полуоси. Приводится иллюстративный пример.

Ключевые слова: линейное однородное вольтеррова интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка; влияние интегральных возмущений типа Вольтерра; ограниченность решений; стремление к нулю решений.

**СЫЗЫКТУУ БИР ТЕКТҮҮ ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК
ТЕНДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ТРАЕКТОРИЯСЫНА
ИНТЕГРАЛДЫК МҮЧӨЛӨРДҮН ТААСИРИН ИЗИЛДӨӨ ЖӨНҮНДӨ**

С. Искандаров, Е.А. Комарцова

Бул макалада тиешелүү бир тектүү сызыктуу үчүнчү тартиптеги дифференциалдык тендеменин чыгарылыштары жарым окто чектелбеген жана нөлгө умтулбаган учурда сызыктуу бир тектүү үчүнчү тартиптеги Вольтерра тибиндеги интегралдык-дифференциалдык тендеменин бардык чыгарылыштарынын жарым окто чектелгендигинин жана аргументтердин чексиз өсүшүндө нөлгө умтулуусунун жетиштүү шарттары белгиленет. Алынган жыйынтыктарды тастыктай турган мисал келтирилет.

Түйүндүү сөздөр: Вольтерра тибиндеги үчүнчү тартиптеги бир тектүү интегралдык-дифференциалдык тендеме; Вольтерра тибиндеги интегралдык мүчөнүн таасири; чыгарылыштардын чектелгендиги; чыгарылыштардын нөлгө умтулуусу.

**ABOUT INVESTIGATION OF INTEGRAL PERTURBATIONS INFLUENCE
ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE THIRD ORDER LINEAR HOMOGENEOUS
DIFFERENTIAL EQUATION**

S. Iskandarov, E.A. Komartsova

Sufficient conditions for boundedness on the semiaxis and tending to zero for unbounded growth of the argument of all solutions of Volterra type third order linear homogeneous integro-differential equation are established in the case, when the corresponding linear homogeneous differential equation of the third order can have unbounded and non-tending to zero solutions on the semiaxis. An illustrative example is given.

Keywords: linear homogeneous integro-differential equation of the third order Volterra type; the influence of Volterra type integral perturbations; boundedness of solutions; tending to zero of solutions.

Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq \tau \geq t_0$; $J = [t_0, \infty)$; ИДУ – интегро-дифференциальное уравнение; ДУ – дифференциальное уравнение.

ЗАДАЧА. Установить достаточные условия ограниченности на J и стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$ всех решений ИДУ третьего порядка типа Вольтерра вида:

$$x'''(t) + \sum_{k=0}^2 \left[a_k(t)x^{(k)}(t) + \int_{t_0}^t Q_k(t, \tau)x^{(k)}(\tau) d\tau \right] = 0, \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

в случае, когда соответствующее линейное однородное ДУ третьего порядка

$$x'''(t) + \sum_{k=0}^2 a_k(t)x^{(k)}(t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

может иметь решения, не обладающие изучаемыми свойствами.

Отметим, что такая задача ранее была изучена в докладе С. Искандарова [1]. Главное отличие настоящей работы от [1] состоит в сведении ИДУ (1) к системе, состоящей из 2-х линейных неоднородных ДУ первого порядка и одного линейного ИДУ первого порядка типа Вольтерра, при этом применяется схема нестандартного метода сведения к системе [2]. В [1] ИДУ (1) было сведено к системе из одного линейного неоднородного ДУ первого порядка и одного линейного ИДУ второго порядка типа Вольтерра, с использованием нестандартного метода сведения к системе [3]. На примерах можно убедиться, что результаты настоящей работы и [1] могут не пересекаться.

В настоящей работе, наряду с нестандартным методом сведения к системе [2], будут развиваться: метод преобразования уравнений [5, с. 25–27]; метод срезывающих функций С. Искандарова [5, с. 41]; метод интегральных неравенств Ю.А. Веды, З. Пахырова [6]; метод интегральных неравенств первого рода одного из авторов [5, с. 110–111], а также используется формула Коши интегрального представления решения линейного неоднородного ДУ первого порядка, правило Лопиталья в форме Штольца [4, с. 115].

Приведем кратко схему решения задачи, которая сформулирована выше.

I этап. В ИДУ (1) сделаем следующие нестандартные замены [2]:

$$x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t)y(t), \quad (3)$$

$$y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t)u(t), \quad (4)$$

где λ_1, λ_2 – некоторые вспомогательные параметры; $0 < W_1(t), W_2(t)$ – некоторые весовые функции; $y(t), u(t)$ – новые неизвестные функции. Тогда ИДУ (1) сводится к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t)y(t), \\ y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t)u(t), \\ u'(t) + b_2(t)u(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \\ + \int_{t_0}^t [P_0(t, \tau)x(\tau) + P_1(t, \tau)y(\tau) + K(t, \tau)u(\tau)] d\tau = 0, t \geq t_0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$b_2(t) \equiv a_2(t) + W(t)(W_1(t))^{-1} + (W_1(t)W_2(t))' (W_1(t)W_2(t))^{-1};$$

$$W(t) \equiv W_1'(t) - (\lambda_1 + \lambda_2)W_1(t);$$

$$b_1(t) \equiv a_1(t)(W_2(t))^{-1} + a_2(t)W(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1} + \lambda_1^2(W_2(t))^{-1} + \\ + [W'(t) - \lambda_2 W(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1};$$

$$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda_1 a_1(t) + \lambda_1^2 a_2(t) - \lambda_1^3](W_1(t)W_2(t))^{-1};$$

$$P_0(t, \tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1} [Q_0(t, \tau) - \lambda_1 Q_1(t, \tau) + \lambda_1^2 Q_2(t, \tau)];$$

$$P_1(t, \tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1} [Q_1(t, \tau)W_1(\tau) + Q_2(t, \tau)W(\tau)];$$

$$K(t, \tau) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1} Q_2(t, \tau)W_1(\tau)W_2(\tau).$$

II этап. Получение энергетической оценки решений системы (5).

Пусть [5]:

$$K(t, \tau) = \sum_{i=0}^n K_i(t, \tau), \tag{K}$$

$\psi_i(t)$ ($i = 1..n$) – некоторые срезающие функции;

$$R_i(t, \tau) \equiv K_i(t, \tau)(\psi_i(t)\psi_i(\tau))^{-1} \quad (i = 1..n).$$

Для любого решения $(x(t), y(t), u(t))$ системы (5), ее первое уравнение умножаем на $x(t)$, второе – на $y(t)$, третье – на $u(t)$, сложим полученные соотношения, затем интегрируем в пределах от t_0 до t , в том числе по частям, при этом вводим условие (K), функции: $\psi_i(t)$, $R_i(t, \tau)$ ($i = 1..n$) [5], применяем лемму 1.4 [7]. В результате получаем тождество:

$$V(t) \equiv (x(t))^2 + 2\lambda_1 \int_{t_0}^t (x(s))^2 ds + (y(t))^2 + \lambda_2 \int_{t_0}^t (y(s))^2 ds + (u(t))^2 + \\ + \sum_{i=1}^n [R_i(t, t_0)(U_i(t, t_0))^2 + \int_{t_0}^t R_{i\tau}'(t, \tau)(U_i(t, \tau))^2 d\tau] \equiv V(t_0) + \\ + 2 \int_{t_0}^t \{W_1(s)x(s)y(s) + W_2(s)y(s)u(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [R_{is}'(s, t_0)(U_i(s, t_0))^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^s R''_{isr}(s, \tau) (U_i(s, \tau))^2 d\tau - u(s) [b_2(s)u(s) + b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) + \\
& + \int_{t_0}^s (P_0(s, \tau)x(\tau) + P_1(s, \tau)y(\tau) + K_0(s, \tau)u(\tau)) d\tau] ds, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $U_i(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^t \psi_i(\eta) u(\eta) d\eta$ ($i=1..n$).

Переходом от тождества (6) к интегральному неравенству и применением леммы 1 [6], доказываемся

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия: 1) $\lambda_k > 0$, $W_k(t) > 0$ ($k=1, 2$), (К); 2) $R_i(t, t_0) \geq 0$, $R'_{ir}(t, \tau) \geq 0$, существуют функции $R_i^*(t) \geq 0$, $R_i^{**}(t) \geq 0$ такие, что $R'_{it}(t, t_0) \leq R_i^*(t)R_i(t, t_0)$, $R''_{it}(t, \tau) \leq R_i^{**}(t)R'_{it}(t, \tau)$ ($i=1..n$);

$$3) W_{k+1}(t) + |b_k(t)| + |b_2(t)| + \int_{t_0}^t [|P_k(t, \tau)| + |K_0(t, \tau)|] d\tau \in L^1(J, R_+ \setminus \{0\}) \quad (k=0, 1).$$

Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t))$ системы (5) справедливо следующее энергетическое неравенство:

$$V(t) \leq V(t_0)M(t), \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
M(t) \equiv \exp & \left(2 \int_{t_0}^t \left\{ W_1(s) + W_2(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [R_i^*(s) + R_i^{**}(s)] + |b_0(s)| + |b_1(s)| + |b_2(s)| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{t_0}^s [|P_0(s, \tau)| + |P_1(s, \tau)| + |K_0(s, \tau)|] d\tau \right\} ds \right).
\end{aligned}$$

III этап. Применение леммы об интегральном неравенстве первого рода С. Искандарова. Пусть для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$, т. е. $1 \leq j \leq n$, функция $R_j(t, t_0) > 0$. Тогда из неравенства (7) следует:

$$R_j(t, t_0) (U_j(t, t_0))^2 \leq V(t_0)M(t) \Rightarrow |U_j(t, t_0)| \leq \sqrt{V(t_0)} (M(t))^{\frac{1}{2}} (R_j(t, t_0))^{-\frac{1}{2}} \equiv q(t) \Rightarrow$$

$$\left| \int_{t_0}^t \psi_j(\eta) u(\eta) d\eta \right| \leq q(t). \quad (8)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть 1) выполняются все условия теоремы 1; 2) для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$: $R_j(t, t_0) > 0$, $q(t) \geq 0$, $q'(t) \geq 0$, $\psi_j(t) > 0$, $\psi'_j(t) \geq 0$, $q(t)(\psi_j(t))^{-1} \in L^1(J, R_+)$. Тогда

$$\int_{t_0}^t u(\eta) d\eta = O(1). \quad (9)$$

Пусть, кроме того, 3) $W_1(t) = O(1)$, $W_2^{(k)}(t) \rightarrow 0$ ($k = 0, 1$) при $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (10)$$

Для доказательства теоремы 2 поступаем так. Сначала к интегральному неравенству первого рода (8) применим лемму 3.3 [5, с. 111]. Тогда будем иметь [в силу условия 2) теоремы 2]:

$$\int_{t_0}^t u(\eta) d\eta = O(1),$$

т. е. (9). Теперь для любых $y(t_0)$, $x(t_0)$ из (4), (3) соответственно, сможем написать формулы Коши:

$$y(t) = e^{-\lambda_2(t-t_0)} \left[y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\lambda_2(s-t_0)} W_2(s) u(s) ds \right], \quad (11)$$

$$x(t) = e^{-\lambda_1(t-t_0)} \left[x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\lambda_1(s-t_0)} W_1(s) y(s) ds \right]. \quad (12)$$

Из (11) интегрированием по частям имеем [8]:

$$y(t) = e^{-\lambda_2(t-t_0)} \left\{ y(t_0) + e^{\lambda_2(t-t_0)} W_2(t) \int_{t_0}^t u(\eta) d\eta - \int_{t_0}^t e^{\lambda_2(s-t_0)} [\lambda_2 W_2(s) + W_2'(s)] \left(\int_{t_0}^s u(\eta) d\eta \right) ds \right\}. \quad (13)$$

Отсюда, с учетом условий $W_2^{(k)}(t) \rightarrow 0$ ($k = 0, 1$) при $t \rightarrow \infty$, получаем, что $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, при этом к (13) применяется правило Лопиталья в форме Штольца [4, с. 115]. Остается к (12) применить также правило Лопиталья в форме Штольца [4, с. 115]. Теорема 2 доказана, т. к. $x(t)$ – любое решение ИДУ (1).

СЛЕДСТВИЕ. Если все условия теорем 1, 2 выполняются при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (вместо условий $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$), то любое решение $x(t)$ ИДУ (1) ограничено на J .

Приведем простейший пример.

ПРИМЕР. Для ИДУ третьего порядка:

$$x'''(t) + (t+1)x''(t) - (2t+5)x'(t) + (t+3)x(t) + \int_0^t \left[Q_1(t, \tau) - Q_2(t, \tau) + \frac{1}{(t+1)(t+\tau+4)} \right] x(\tau) + \left[2Q_2(t, \tau)(\tau+1) - \frac{\sqrt{t+\tau+5}}{t+1} \right] x'(\tau) + Q_2(t, \tau)x''(\tau) \Big\} d\tau = 0, t \geq 0,$$

где $Q_2(t, \tau) \equiv \frac{t+1}{\tau+1} \left[\left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2} \right) \exp(e' + e^\tau) + \frac{(\sin t + \cos \tau)^{1/3}}{t+\tau+5} \right]$, выполняются все условия теорем 1,

2 при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $W_1(t) \equiv 1$, $W_2(t) \equiv \frac{1}{t+1}$, здесь $t_0 = 0$, $b_2(t) \equiv -\left(t+1 + \frac{1}{t+1}\right)$, $b_1(t) \equiv -4(t+1)^2$,

$$b_0(t) \equiv 4(t^2 + 3t + 2), \quad P_0(t, \tau) \equiv \frac{1}{t+\tau+4}, \quad P_1(t, \tau) \equiv (t+\tau+5)^{\frac{1}{2}},$$

$$K(t, \tau) \equiv \left(\frac{t+\tau+1}{t+\tau+2} \right) \exp(e' + e^\tau) + \frac{(\sin t + \cos \tau)^{1/3}}{t+\tau+5}, \quad n=1, \quad \psi_1(t) \equiv \exp e', \quad R_1(t, \tau) \equiv \frac{t+\tau+1}{t+\tau+2},$$

$$R_1^*(t) \equiv \frac{1}{(t+1)(t+2)}, \quad R_1^{**}(t) \equiv 0, \quad K_0(t, \tau) \equiv (t+\tau+5)^{-1} (\sin t + \cos \tau)^{1/3}.$$

Однако соответствующее ДУ:

$$x'''(t) + (t+1)x''(t) - (2t+5)x'(t) + (t+3)x(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

имеет неограниченные на $R_+ = [0, \infty)$ частные решения $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = te^t$.

Литература

1. Искандаров С. О влиянии интегральных возмущений на ограниченность решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка на полуоси / С. Искандаров // The abst. book of the International scientific conf. «Weighted estimates of differential and integral operators and their applications», 04–06.05.2017. Astana, L.N. Gumilev ENU. Astana: L.N. Gumilev ENU, 2017. Pp. 178–181.
2. Iskandarov S. Method of a nonstandard reduction to a system and exponential stability of a third-order linear ordinary differential equation / S. Iskandarov // Different. equations. 2010. Vol. 46. No. 6. Pp. 907–908.
3. Искандаров С. О методе сведения к системе для линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка / С. Искандаров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. Бишкек: Илим, 2006. Вып. 35. С. 31–35.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. Искандаров С. Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра / С. Искандаров. Бишкек: Илим, 2002. 216 с.

6. *Ведь Ю.А.* Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро-дифференциальных уравнений / Ю.А. Ведь, З. Пахыров // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Илим, 1973. Вып. 9. С. 68–103.
7. *Искандаров С.* Метод весовых и срезающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук / С. Искандаров. Бишкек, 2003. 34 с.
8. *Комарцова Е.А.* Достаточные условия устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения пятого порядка на полуоси / Е.А. Комарцова // Вестник КРСУ. 2018. Т. 18. № 12. С. 8–14.