УДК 517.9

ОДНОСКОРОСТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Ж.Ж. Саркелова

Теория обратных задач является одной из наиболее молодых и интенсивно развивающихся областей математики. В последнее время появилось много работ, в которых рассматриваются различные постановки обратных задач. Также следует отметить, что в физических приложениях встречается множество обратных задач, связанных с дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных в ограниченных и неограниченных областях. В связи с этим в настоящей работе исследуется сингулярно-возмущенная обратная задача переноса в неограниченной области с априорной информацией в определенном пространстве. Решение задачи ищется в весовом пространстве. Определяется единственность решения сингулярно-возмущенной обратной задачи переноса. При этом устанавливается условие однозначной разрешимости и близости решений сингулярно-возмущенной обратной задачи и вырожденной обратной задачи в Гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: обратная задача; односкоростная задача; уравнение переноса; априорная информация; весовое пространство.

ЧЕКСИЗ АЙМАКТАГЫ СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ЖЫЛЫШУУ ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН БИР ЫЛДАМДЫКТАГЫ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕ

Ж.Ж. Саркелова

Тескери маселелер теориясы – математиканын эң жаш жана интенсивдүү өнүгүп келе жаткан багыттарынын бири. Акыркы убакта, ар кандай тескери маселелердин баяндалышы каралган көптөгөн эмгектер пайда болду. Физикалык тиркемелерде чектелген жана чексиз аймактардагы жарым-жартылай туундулардагы дифференциалдык жана интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен байланышкан көптөгөн тескери маселелер бар экендигин белгилей кетүү керек. Ушуга байланыштуу, бул эмгекте аныкталган мейкиндикте априори маалыматы бар, чексиз аймактагы жылышуу теңдемеси үчүн сингулярдык козголгон тескери маселе изилдөөгө алынган. Маселенин чечилиши салмактуу мейкиндиктен изделет. Ошол эле учурда, Гилберт мейкиндигинде сингулярдык козголгон тескери маселенин жана туунду тескери маселелердин чыгарылышынын жакындыгы жана бир маанилүү чечилиш шарты белгиленген.

Түйүндүү сөздөр: тескери маселе; бир ылдамдыктагы маселе; жылышуу теңдемеси; априори маалыматы; салмактуу мейкиндик.

ONE-SPEED INVERSE PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED TRANSFER EQUATIONS IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Zh.Zh. Sarkelova

Inverse problem theory is one of the youngest and most rapidly developing areas of mathematics. Recently, many works have appeared in which various formulations of inverse problems are considered. It should also be noted that in physical applications there are many inverse problems associated with differential and integro-differential equations in partial derivatives in bounded and unbounded domains. In this regard, in this work, we study a singularly perturbed inverse transport problem in an unbounded domain with a priori information in a certain space. The solution to the problem is sought in the weight space. The uniqueness of the solution to the singularly perturbed inverse transport problem is determined. In this case, a condition is established for the unique solvability and proximity of solutions to a singularly perturbed inverse problem and a degenerate inverse problem in Hilbert space.

Keywords: inverse problem; one-rate problem; transport equation; a priori information; weighted space.

Введение. Существуют фундаментальные работы в теории прямых задач для сингулярно-возмущенных уравнений (СВУ) [1–5]. Но обратные задачи для указанных уравнений, особенно в теории переноса в неограниченной области [6–9], мало изучены. В связи с этим, в данной работе исследуется обратная задача для СВУ, когда информация о решении СВУ должна согласоваться с решением вырожденных обратных задач, и с априорными оценками в тех пространствах, которые введены относительно известных данных. Указанные условия являются как необходимые условия разрешимости изучаемых обратных задач переноса.

Рассмотрим сингулярно-возмущенную обратную задачи вида:

$$\varepsilon^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left(E_a^{1,1}U_\varepsilon\right)+\lambda E_a^{1,1}U_\varepsilon+h(x)U_\varepsilon=Z_\varepsilon(x)f(t), \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_\varepsilon(t,x)|_{t=0}=V(0,x)+\exp\left(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}\right),(i=0:V^{(0)}(t,x)=V(t,x);\ i=1:V_t^{(1)}(t,x)=\dfrac{\partial}{\partial t}V(t,x)) \\ U_{\varepsilon t}(t,x)|_{t=0}=V_t(0,x)+2ax\varepsilon^{-1}\exp\left(-\dfrac{x^2}{\varepsilon}\right),\ \forall x\in R, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} (U_{\varepsilon t}+aU_{\varepsilon x})|_{t=T}=V_t(T,x)+aV_x(T,x)+g_\varepsilon(x), \\ V_t(T,x)+aV_x(T,x)=g_0(x),\ \forall x\in R, \end{cases} \tag{3}$$

с априорной информацией в $L^2(R)$:

$$\begin{cases} \|g_\varepsilon(x)\|_{L^2(R)}\le\Delta_0(\varepsilon), \\ \|U_\varepsilon(0,x)-V(0,x)\|_{L^2(R)}\le\left(\displaystyle\int_R\exp\left(-\frac{2\tau^2}{\varepsilon}\right)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{4}}, \end{cases} \tag{4}$$

где $E_a^{1,1}$ – дифференциальный оператор первого порядка вида: $E_a^{1,1}=\dfrac{\partial}{\partial t}+a\dfrac{\partial}{\partial x}$, а $0<\beta<\dfrac{1}{2},\ 0<a,\ \lambda=const;\ 0\le h(x),\ f(t),\varphi_i(x),(i=0,1),\ g_0(x),;\ \ g_\varepsilon(x)$ – известные данные.

При этих условиях $\psi_\varepsilon=(U_\varepsilon,Z_\varepsilon)$ – являются неизвестными функциями исходной задачи (1)–(3).

Здесь $V(t,x)$ – это решение вырожденной обратной задачи, которая следует при $\varepsilon=0$ из исходной задачи.

Исследование разрешимости обратной сингулярно-возмущенной задачи с априорной информацией об исходных данных

I. Когда $\varepsilon=0$, то из (1) получим вырожденную задачу вида:

$$\begin{cases} E_a^{1,1}V+\dfrac{1}{\lambda}hV=\dfrac{1}{\lambda}\tilde{Z}(x)f(t), \\ V|_{t=0}=\varphi_0(x),\ \forall x\in R \end{cases} \tag{5}$$

с дополнительным условием (4) относительно $V(t,x)\notin \mathrm{C}^{1,1}(\Omega)$, причем допускаются условия:

$$\begin{cases} \left(\int\limits_{\Omega} h(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \tilde{h}_0, \ (0 \le h(x) \le h_0), \\ \left(\int\limits_{\Omega} h^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \tilde{h}_0, \\ \sup\limits_{[0,T]} | f^{(i)}(t) | \le f_0 = const, \ (i = 0,1), f(0) = 0; \ f(T) \ne 0, \\ f(T) - \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right) f'(s)ds = M_0(T, \lambda, \varepsilon^\beta) \ne 0, \ (\forall \varepsilon \in (0,1), \ \varepsilon = 0), \\ \Omega = (0,T) \times R. \end{cases} \tag{6}$$

Если имеют место условия (3), (4) и (6), то из вырожденной задачи (5) следует нагруженная система уравнений:

$$\begin{cases} E_a^{1,1}V(t,x) + \frac{1}{\lambda}h(x)V(t,x) = \left(f(T)\right)^{-1} f(t)[g_0(x) + \frac{1}{\lambda}hV(T,x)] \equiv (B_0V)(t,x), \\ \tilde{Z}(x) = (f(T))^{-1}[\lambda g_0(x) + hV(T,x)]. \end{cases} \tag{7}$$

Далее, для интегрализации вырожденной обратной задачи по времени введем преобразование вида [8]:

$$\begin{cases} V = Q\exp\left(-\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau\right), \\ Q|_{t=0} = \varphi_0(x)\exp\left(\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau\right) \equiv \psi_0(x), \end{cases} \tag{8}$$

и частично заменяя левую сторону (7), с учетом (8), имеем:

$$Q_t + aQ_x = (B_0V)(t,x)\exp\left(\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{-\infty}^{x} h(\tau)d\tau\right). \tag{9}$$

Следовательно, из (9) вытекает уравнение вида:

$$Q = \psi_0(x-at) + \int\limits_0^t (B_0V)(s, x-a(t-s))\exp\left(\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{-\infty}^{x-a(t-s)} h(\tau)d\tau\right)ds. \tag{10}$$

Тогда, подставляя уравнение (10) в уравнение (8), получим интегральное уравнение второго рода:

$$V = \varphi_0(x-at)\exp\left(-\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{x-at}^{x} h(\tau)d\tau\right) + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x} h(\tau)d\tau\right)\times$$
$$\times\{(f(T))^{-1}f(s)[g_0(x-a(t-s)) + \frac{1}{\lambda}h(x-a(t-s))V(T,x-a(t-s))]\}ds \equiv (BV)(t,x). \quad (11)$$

Если имеют место:

$$\begin{cases} d_0 = \frac{1}{\lambda}\sup\limits_{\bar\Omega}[\left|(f(T))^{-1}\right|\int\limits_0^t (|f(s)|h(x-a(t-s)))\exp\left(-\frac{1}{\lambda a}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x} h(\tau)d\tau\right)ds] < 1, \\ \| BV_0 - V_0 \| \le (1-d_0)r, \\ S_r(V_0) = \{V : |V - V_0| \le r = const,\ \forall (t,x)\in\bar\Omega\}, \end{cases} \quad (12)$$

то уравнение (8) разрешимо и при этом предпологается, что: $V_{t^2}(t,x), V_{tx}(t,x) \in L^2(\Omega)$.

В самом деле, так как по условиям вырожденной обратной задачи $V \in C^{1,1}(\bar\Omega)$, а указанные выше частные производные могут быть разрывными, так как не можем требовать непрерывности относительно этих производных. Поэтому, можем требовать [10]:

$$\begin{cases} \| V_{t^2} \|_{L^2} = \left(\int\limits_0^T\int\limits_R |V_{t^2}(t,x)|^2\, dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \le C_{01}, \\ \| V_{tx} \|_{L^2} = \left(\int\limits_0^T\int\limits_R |V_{tx}(t,x)|^2\, dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \le C_{02},\ (C_0 = \max(C_{01}, C_{02})). \end{cases} \quad (13)$$

Следовательно, правая сторона второго уравнения системы (7) является известной функцией, т. е. $\tilde Z(x)$ найдено.

Лемма 1. В условиях (4), (6) и (12) вырожденная задача (5) разрешима в $C^{1,1}(\bar\Omega)$ с условием (13).

II. Далее, решение СВУ (1) ищем в виде:

$$\begin{cases} U_\varepsilon = V(t,x) + \xi_\varepsilon(t,x) + \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right), \\ Z_\varepsilon = \tilde Z(x) + \eta_\varepsilon(x), \end{cases} \quad (14)$$

получим систему уравнений относительно функций V, ξ_ε, т. е.:

$$\begin{cases} V_t + aV_x + \dfrac{1}{\lambda} hV = \dfrac{1}{\lambda}\tilde{Z}(x) f(t), \\ \varepsilon^{\beta} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(E_a^{1,1}\xi_\varepsilon\right) + \lambda\left(E_a^{1,1}\xi_\varepsilon\right) = -h(x)\xi_\varepsilon + \eta_\varepsilon(x) f(t) - [h(x)\exp\left(-\dfrac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right) + \\ +\varepsilon^{\beta}(V_{t^2} + aV_{tx})], \\ \xi_t^{(i)}(t,x)|_{t=0} = 0, \ (i = 0,1), \end{cases} \tag{15}$$

так как

$$\begin{cases} U_{\varepsilon t} = V_t + \xi_{\varepsilon t} + \dfrac{2a(x-at)}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right), \\ U_{\varepsilon x} = V_x + \xi_{\varepsilon x} - \dfrac{2(x-at)}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right), \\ U_{\varepsilon t} + aU_{\varepsilon x} = V_t + aV_x + \xi_{\varepsilon t} + a\xi_{\varepsilon x}. \end{cases} \tag{16}$$

Кроме того, с учетом (3), из системы уравнений (16) имеем:

$$(U_{\varepsilon t} + aU_{\varepsilon x})_{t=T} = (V_t + aV_x)_{t=T} + (\xi_{\varepsilon t} + a\xi_{\varepsilon x})_{t=T} = g_0(x) + (\xi_{\varepsilon t} + a\xi_{\varepsilon x})_{t=T}$$

или

$$\begin{cases} (\xi_{\varepsilon t} + a\xi_{\varepsilon x})|_{t=T} = g_\varepsilon(x), \ \forall x \in R, \\ \| g_\varepsilon(x) \|_{L^2(R)} \le \Delta_0(\varepsilon). \end{cases} \tag{17}$$

Условие (17) является дополнительной информацией для разрешимости обратной задачи для остаточных функций $(\xi_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$, а V – решение вырожденной задачи (5).

Далее, из системы (15) относительно функции $\xi_\varepsilon(t,x)$, получим:

$$\begin{cases} E_a^{1,1}\xi_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^{\beta}}\displaystyle\int_0^t \exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^{\beta}}(t-s)\right)\{-h(x)\xi_\varepsilon(s,x) + \eta_\varepsilon(x) f(s)\}ds + Y_1(t,x,\varepsilon), \\ Y_1(t,x,\varepsilon) \equiv \displaystyle\int_0^t \exp\left(-\dfrac{\lambda}{\varepsilon^{\beta}}(t-s)\right)\{-(V_{s^2}(s,x) + aV_{sx}(s,x)) - \dfrac{1}{\varepsilon^{\beta}} h(x)\exp\left(-\dfrac{(x-as)^2}{\varepsilon}\right)\}ds. \end{cases} \tag{18}$$

Задача (18) с условиями (15)–(17) является обратной задачей относительно остаточных функций $\xi(t,x), \eta_\varepsilon(x)$. Поэтому уравнение (18) должно дополняться с уравнением относительно $\eta_\varepsilon(x)$. С этой целью, учитывая условия (6) и (17), из уравнения (18) находим:

$$\eta_\varepsilon(x) = (H_0\xi_\varepsilon)(T,x) + Y_2(x,\varepsilon), \tag{19}$$

$$\begin{cases} Y_2 \equiv M_0^{-1}\{g_\varepsilon(x) - \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right)[-(V_{s^2}(s,x)+aV_{sx}(s,x)) - \frac{1}{\varepsilon^\beta}h(x)\times \\ \times\exp\left(-\frac{(x-as)^2}{\varepsilon}\right)]ds\}, \\ (H_0\xi_\varepsilon)(T,x) \equiv M_0^{-1}\frac{1}{\varepsilon^\beta}\int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right)[h(\mathrm{x})\xi_\varepsilon(s,x)]ds, \end{cases}$$

при этом имеет место:

$$\begin{cases} |Y_2(x,\varepsilon)| \le |M_0^{-1}|\{|g_\varepsilon(x)| + \left(\int\limits_0^T \exp\left(-\frac{2\lambda}{\varepsilon^\beta}(T-s)\right)ds\right)^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{\varepsilon^\beta}h(x)\times \\ \times\left(\int\limits_0^T \exp\left(-\frac{2(x-as)^2}{\varepsilon}\right)ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^T |V_{s^2}(s,x)+aV_{sx}(s,x)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}]\} \le \\ \le |M_0^{-1}|\{|g_\varepsilon(x)| + h(x)\gamma_1\varepsilon^{\frac{1-2\beta}{4}} + \gamma_2\left(\int\limits_0^T |V_{s^2}(s,x)+aV_{sx}(s,x)|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}\}\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}, \\ \gamma_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda a}}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}},\ \gamma_2 = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|Y_2\|_{L^2(R)} \le |M_0^{-1}|\{\Delta_\varepsilon(x) + \gamma_1\tilde{h}_0\varepsilon^{\frac{1-2\beta}{4}} + \gamma_2\tilde{C}_0\varepsilon^{\frac{\beta}{2}}\} = \delta_0(\varepsilon), \\ \left(\int\limits_R h^m(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \tilde{h}_0,\ (m=1,2), \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} \left(\int\limits_0^T\int\limits_R |V_{s^2}(s,\tau)+aV_{s\tau}(s,\tau)|^2\,dsd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le \tilde{C}_0;\ 0<\beta<\frac{1}{2}, \\ |Y_1| \le \gamma_2 C_0(1+a)\varepsilon^{\frac{\beta}{2}} + \gamma_1 h_0\varepsilon^{\frac{1-2\beta}{4}} = \delta_1(\varepsilon),\ (0\le h\le h_0,\ \forall x\in R). \end{cases}$$

Тогда, на основе (18), (19) следует:

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t,x) = \int\limits_0^t \{ \int\limits_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)[-\frac{1}{\varepsilon^\beta} h(x-a(t-s))\xi_\varepsilon(s', x-a(t-s)) + \\ +\frac{1}{\varepsilon^\beta} f(s')(H_0\xi_\varepsilon)(T, x-a(t-s))\} ds + Y(t,x,\varepsilon) \equiv (H\xi_\varepsilon)(t,x) + Y(t,x,\varepsilon), \\ Y(t,x,\varepsilon) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right)\frac{1}{\varepsilon^\beta} f(s')Y_2(x-a(t-s),\varepsilon)ds'ds + \\ +\int\limits_0^t Y_1(s, x-a(t-s),\varepsilon)ds, \end{cases} \tag{21}$$

причем выполняется условие:

$$\begin{cases} |Y| \le |\int\limits_0^t Y_2(x-a(t-s);\varepsilon)[\frac{1}{\lambda} f(s) - \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^s \exp\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon^\beta}(s-s')\right) f'(s')ds']ds| + \delta_1(\varepsilon)T \le \\ \le \left(\int\limits_0^t |Y_2(x-a(t-s),\varepsilon|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} f_0\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\varepsilon^\beta\right)\sqrt{T} + \delta_1(\varepsilon)T \le \\ \le \gamma_3\left(\int\limits_{x-at}^x |Y_2(\rho,\varepsilon)|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} + \delta_1(\varepsilon)T \le \gamma_3\Delta_0(\varepsilon) + \delta_1(\varepsilon)T = \delta_2(\varepsilon), \ \forall (t,x) \in \bar{\Omega}, \\ \gamma_3 = \frac{1}{\lambda a} f_0\sqrt{T}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right). \end{cases} \tag{22}$$

Лемма 2. Если имеют место (17), (20), (22) и леммы 1, и

$$\begin{cases} L_H < 1, \\ H: S_{r_0} \to S_{r_0}, \ (S_{r_0}(0) = \{\xi_\varepsilon : |\xi_\varepsilon| \le r_0, \ \forall (t,x) \in \bar{\Omega}\}), \end{cases} \tag{23}$$

где $0 < L_H$ – коэффициент Липшица оператора H.

Тогда уравнение (21) разрешимо в $C(\bar{\Omega})$ с оценкой:

$$\|\xi_\varepsilon\| \le (1-L_H)^{-1}\delta_2(\varepsilon). \tag{24}$$

Следовательно, на основе (19) следует:

$$\|\eta_\varepsilon(x)\|_{L^2(R)} \le \delta_0(\varepsilon) + |M_0^{-1}|(1-L_H)^{-1}\delta_2(\varepsilon)\frac{1}{\lambda}[\left(\int\limits_R h^2(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}] \le \delta_3(\varepsilon). \tag{25}$$

Оценка близости решений сингулярно-возмущенной и вырожденной задачи

Из полученных результатов лемм 1, 2 видно, что из (14), имеем:

$$|U_\varepsilon - V| \le (1-L_H)^{-1}\delta_2(\varepsilon) + \exp\left(-\frac{(x-at)^2}{\varepsilon}\right),$$

или проведя оценку в смысле нормы $L_h^2(\Omega)$, получим:

$$\begin{cases} \|U_\varepsilon - V\|_{L_h^2} \le (1-L_H)^{-1}\delta_2(\varepsilon)(\tilde{h}_0 T)^{\frac{1}{2}} + (\sup\limits_{[0,T]}\int\limits_0^t\int\limits_R h(\tau)\exp(-2\frac{(\tau-as)^2}{\varepsilon})d\tau ds)^{\frac{1}{2}} \le \\ \le \alpha_1\delta_2(\varepsilon) + \alpha_2\varepsilon^{\frac{1}{4}} = \delta_4(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \alpha_1 = (1-L_H)^{-1}(\tilde{h}_0 T)^{\frac{1}{2}};\ \alpha_2 = \sqrt{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{26}$$

Из результатов (25), (26) видно, что если обозначим $\tilde{\Psi} = (U_\varepsilon - V; Z_\varepsilon - \tilde{Z})$, то вектор-функцию $\tilde{\Psi}$ можно оценить в пространстве $W_h^2(\Omega)$, т. е. имеем оценку вида:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} \in W_h^2(\Omega) = \{(U_\varepsilon - V, Z_\varepsilon - \tilde{Z}) : U_\varepsilon - V \in L_h^2(\Omega), Z_\varepsilon - \tilde{Z} \in L^2(R)\}, \\ \|\tilde{\Psi}\|_{W_h^2(\Omega)} = \|U_\varepsilon - V\|_{L_h^2(\Omega)} + \|Z_\varepsilon(x) - \tilde{Z}(x)\|_{L^2(R)} \le \delta_4(\varepsilon) + \delta_3(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \\ \tilde{\Psi} = (U_\varepsilon - V; Z_\varepsilon - \tilde{Z}). \end{cases} \tag{27}$$

Теорема 1. В условиях лемм (1, 2) и (27) СВОЗ переноса (1)–(4) имеет единственное решение по правилу (14), при этом близость решений этой задачи и вырожденной обратной задачи в $W_h^2(\Omega)$ устанавливается в виде (27).

Заключение. Из представления решения обратной задачи вида (14), содержащего решение обратной вырожденной задачи и остаточных функций, которые определяются из системы (18) и (19) ясно, что решение сингулярно-возмущенной задачи согласно правилу (14) является единственным и допускается оценка вида (27). Это означает, что настоящая близость решения обратной сингулярно-возмущенной задачи и обратная вырожденной задачи установлены в пространстве $W_h^2(\Omega)$.

Литература

1. *Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. М.: Наука, 1973. 272 с.
2. *Иманалиев М.И.* Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем / М.И. Иманалиев. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
3. *Лаврентьев М.М.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев, В.Г. Васильев, В.Г. Романов. Новосибирск: Наука, 1969. 67 с.
4. *Омуров Т.Д.* Задача Коши для нелинейного сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в неограниченной области / Т.Д. Омуров, А.Р. Алиева // Приволжский научный вестник. Ижевск (Россия). 2016. № 12-1(64). С. 36–43.
5. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра / А.Н. Тихонов // Математический сборник. 1948. 22(64). Вып. 2. С. 193–204.
6. *Ахиезер А.И.* Кинетические уравнения Больцмана / А.И. Ахиезер. Киев: ИТФ АН ССР, 1973. 29 с.
7. *Казаков А.Я.* Обратные задачи линейной теории переноса излучения в плоской среде / А.Я. Казаков // ДАН СССР. 1983. 270. № 5. С. 1100–1103.

8. *Омуров Т.Д.* Прямые и обратные задачи односкоростной теории переноса / Т.Д. Омуров, М.М. Туганбаев. Бишкек: Илим, 2010. 116 с.
9. *Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana.* Conditions for runaway phenomena in the kinetic theory of particle swams / Frosali, van der Mee, Paveri-Fontana // Journal Math. Phys. 1989. Vol. 30. No. 5. Pp. 1177–1186.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ / В.А. Треногин. М.: Наука, 1980. 496 с.