

УДК 539.215

## **О МЕТОДИКЕ ПОСТРОЕНИЯ ПАСПОРТА ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД**

*Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина*

Рассматривается метод построения паспорта прочности горных пород согласно ГОСТ 21153.8–88. Таким паспортом считается получаемая известным образом огибающая предельных кругов напряжения Мора в координатах нормального и касательного напряжений. Регламентируется использование экспериментальных данных при одноосном растяжении и сжатии, а также при объемном напряженном состоянии. Рекомендуются также использование эмпирического критерия прочности, параметры которого определяются только из опытов на растяжение и сжатие. Предлагается эмпирическое построение огибающей отдельно в области от одноосного растяжения до одноосного сжатия, а затем от одноосного сжатия и при разных состояниях трехосного сжатия.

*Ключевые слова:* горные породы; растяжение; сжатие; огибающая предельных кругов напряжения; критерий прочности.

---

## **ТОО ТЕКТЕРИНИН БЕКЕМДИГИНИН ПАСПОРТУН ТҮЗҮҮ МЕТОДИКАСЫ ЖӨНҮНДӨ**

*Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина*

Бул макалада МАМСт 21153.8–88ге ылайык тоо тектеринин бекемдигинин папартун түзүү ыкмасы каралган. Мындай паспорт болуп нормалдуу жана тийип турган чыңалуу координаттарында белгилүү ыкма менен алынуучу чектелген айлананы ийүүчү Мордун чыңалуусу эсептелет. Бир октуу чоюуда жана кысууда, ошондой эле көлөмдүү чыңалган абалда эксперименталдык маалыматтарды пайдалануу регламенттештирилет. Ошондой эле параметрлери чоюу жана кысууга тажрыйба жүргүзүүдө гана аныкталуучу эмпирикалык бекемдик критерийин пайдалануу сунушталат. Бир октуу чоюдан бир октуу кысууга чейин, андан соң бир октуу кысууда жана үч октуу кысуунун ар түрдүү абалдарында ийүүчү эмпирикалык курулуш сунушталат.

*Түйүндүү сөздөр:* тоо тектери; чоюу; кысуу; чектелген чыңалуу айланасын ийүүчү; бекемдик критерийлери.

---

## **THE METHODOLOGY OF ROCK STRENGTH PASSPORT'S CONSTRUCTION**

*B.A. Rychkov, I.V. Goncharova, N.M. Komartsov, M.A. Kulagina*

The article reviews a method of rock strength passport's construction according to GOST 21153.8–88. Such a passport is the envelope of the Mohr limit stress circles in the coordinates of normal and shear stresses obtained in the known way. The research regulates the use of experimental data under uniaxial tension and compression, as well as under volumetric stress state. It recommends using an empirical strength criterion, the parameters of which are determined only in tension and compression tests. This work proposes an empirical construction of the envelope apart in the area from uniaxial tension to uniaxial compression, and then from uniaxial compression and under different states of triaxial compression.

*Keywords:* rocks; tension; compression; envelope of limit stress circles; strength criterions.

**1. Постановка построения паспорта прочности горных пород.** Напряженное состояние горных пород в массиве моделируется испытаниями стандартных цилиндрических образцов

на установках по схеме Т. Кармана, когда между осевым напряжением сжатия  $\sigma_1$  и главными напряжениями  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  от равномерного бокового давления выполняется соотношение:  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ . При этом сжимающие напряжения считаются положительными; по их соотношению в момент разрушения образцов судят о прочности пород. Такие испытания регламентируются ГОСТ 21153.8–88 [1].

Напряженные состояния, при которых разрушается материал, могут быть представлены, согласно О. Мору, предельными кругами в координатах  $\sigma - \tau$  (нормальное – касательное напряжения в плоскости с заданной нормалью):

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma\right) + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2, \quad (1)$$

где главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_3$  соответствуют моменту наступления разрушения.

Наибольший предельный круг напряжений Мора соответствует напряженному состоянию (при разрушении образца), достигаемому при заданном соотношении между  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , и имеет радиус

$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  с координатами центра  $\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; 0\right)$ . Для получения такой диаграммы Мора используют

(согласно ГОСТ 21153.8–88) результаты определения пределов прочности не менее чем при трех видах напряженного состояния (в пределах заданного диапазона напряжений); вид напряженного состояния характеризуется параметром  $c = \sigma_3 / \sigma_1$ . К семейству получаемых таким образом полуокружностей при трехосном сжатии добавляют полуокружности с радиусами  $\frac{\sigma_p}{2}$  и  $\frac{\sigma_{сжс}}{2}$  с координатами

центров  $\left(-\frac{\sigma_p}{2}; 0\right)$  и  $\left(\frac{\sigma_{сжс}}{2}; 0\right)$ , где  $\sigma_p$  – предел прочности при одноосном растяжении по ГОСТ 21153.3–85, разд. 2 или 4 [2];  $\sigma_{сжс}$  – предел прочности при одноосном сжатии по ГОСТ 21153.2–84, разд. 1 [3]. Проводят плавную линию, огибающую все пять (или более) полуокружностей. Эта огибающая линия принимается в качестве паспорта прочности горной породы.

**2. Использование эмпирического критерия прочности.** В ГОСТ 21153.8–88 рекомендуется также следующий расчетный метод построения паспорта прочности по данным определения пределов прочности при одноосном сжатии и растяжении.

Метод предусматривает определение координат точек огибающей расчетным путем по эмпирическому уравнению (критерию прочности), которое принимают в виде:

$$\tau = \tau_{\max} \left( \frac{\sigma_K^2}{\sigma_K^2 + a^2} \right)^{3/8}, \quad (2)$$

где  $\tau_{\max}$  – максимальное сопротивление породы срезу (сдвигу) при гипотетически полностью закрывшихся под действием нормального давления трещинах и порах;  $\sigma_K$  – нормальное напряжение относительно начала координат, перенесенного в точку пересечения огибающей с осью абсцисс;  $a$  – параметр формы огибающей кривой.

Эмпирическое уравнение (2) предложено М.М. Протодяконовым [4]. Им установлено следующее соотношение между максимальным сопротивлением сдвигу  $\tau_{\max}$  и параметром  $a$ :  $\tau_{\max} = 0,73a = 0$ . Параметры уравнения (2) определяются с помощью специально составленной таблицы по результатам испытания пород на осевое растяжение и одноосное сжатие, что значительно усложняет расчет. Данный расчетный метод применим (как указано в ГОСТ) в диапазоне нормальных напряжений  $\sigma$ , не превышающих значения  $1,5\sigma_{сжс}$ . При этом, количество («опорных») точек для построения огибающей

должно быть не менее десяти, в том числе не менее двух точек должны иметь координаты области растяжения.

Согласно методике М.М. Протодяконова [1] для удобства расчетов и табулирования введенных параметров уравнение (2) переводят в безразмерные координаты  $l$  и  $K$ , связанные соотношением:

$$l = 0,73 \left( \frac{K^2}{K^2 + 1} \right)^{3/8}. \quad (3)$$

Вводят безразмерные радиусы предельных кругов Мора для одноосного растяжения  $q_1$  и одноосного сжатия  $q_2$  и, используя отношение  $q_2/q_1 = \sigma_{сж}/\sigma_p$ , последовательно вычисляют:

– значение параметра формы огибающей:

$$a = \frac{\sigma_{сж}}{2q_2}; \quad (4)$$

– значение параметра переноса начала координат:

$$\sigma_0 = a(K_1 + q_1), \quad (5)$$

где  $q_2$  и  $(K_1 + q_1)$  определяют по таблице 3 [1] для соответствующего значения отношения  $q_2/q_1$ .

Вычисляют координаты  $\sigma$  и  $\tau$  отдельных точек огибающей:

$$\sigma = K \cdot a - \sigma_0, \quad \tau = l \cdot a. \quad (6)$$

Значения безразмерных величин  $K$  и  $l$  принимают по таблице 4 [1]. При этом сначала определяют верхнее граничное значение  $K$  обратным пересчетом по величине наибольшего нормального напряжения  $\sigma$ , которым должна быть задана верхняя граница диапазона построения паспорта прочности:

$$K = \frac{\sigma + \sigma_0}{a}. \quad (7)$$

Недостаток критерия М.М. Протодяконова – ограниченная область применимости данного критерия при трехосном сжатии и необходимость использования табулированных функций при построении огибающей путем задания этих функций не менее чем в десяти «опорных» точках для достижения гладкой линии огибающей.

В качестве примера применимости огибающей Протодяконова рассмотрены полученные в эксперименте [5] предельные круги для талькохлорита (см. рисунок 1). Приведены круги на одноосное растяжение и сжатие, а также при двух объемных напряженных состояниях ( $c = 0,069$  и  $c = 0,116$ ).

Показано, что действительно данная огибающая касается предельных кругов на растяжение ( $\sigma_p = 130$ ) и сжатие ( $\sigma_{сж} = 945$ ) и достаточно близко располагается к кругу на трехосное сжатие при  $c = 0,069$  ( $\sigma_I = 1320$ ). Здесь и далее размерность напряжений –  $9,81 \cdot 10^{-1}$  МПа. При этом значение предела прочности в осевом направлении:  $\sigma_I(c = 0,069) = 1,4\sigma_{сж}$ . При увеличении бокового давления, т. е. с ростом значения параметра  $c > 0,069$ , эти объемные напряженные состояния уже не отражаются огибающей Протодяконова.

Достоинством методики построения огибающей по Протодяконову является то, что для рассматриваемой горной породы можно варьировать предел прочности на растяжение, но при этом огибающая (при пересчете введенных параметров  $a$  и  $\sigma_0$ ) все равно будет касаться обоих предельных кругов (на растяжение и сжатие). Например, расчетное значение предела прочности на растяжение, полученное Ставрогиным ([5, Приложение 3])  $\sigma_p = 112$ . В этом случае огибающая Протодяконова

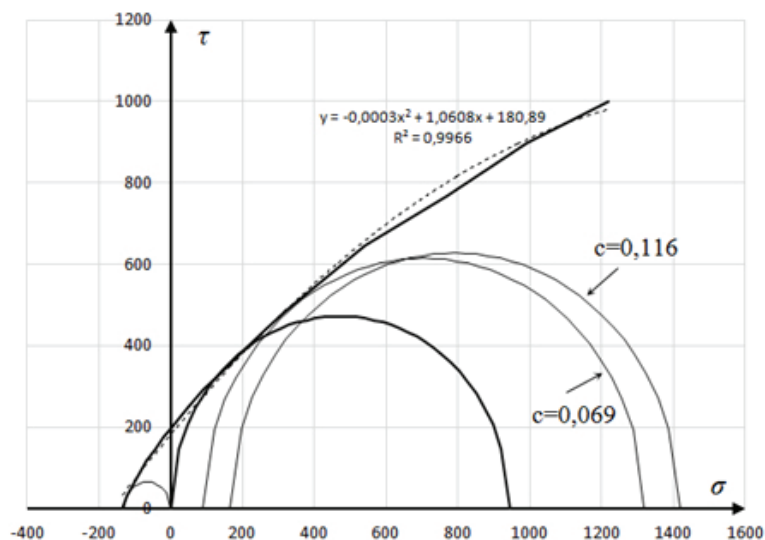


Рисунок 1 – Линией тренда в виде полинома второй степени  $y(x)$  аппроксимируется огибающая Протодыконова с высокой достоверностью  $R^2$

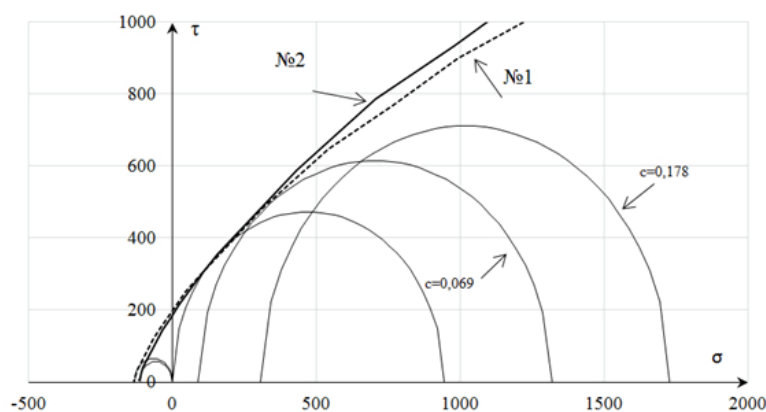


Рисунок 2 – Варианты огибающей Протодыконова

(первоначально проведенная при задании экспериментального значения предела прочности на растяжение и указанная на рисунке 2 под № 1) «поворачивается» в сторону еще большего отхода от кругов объемного сжатия  $c > 0,069$  (рисунок 2, кривая № 2).

**3. Эмпирические огибающие.** В практике используется линейная огибающая, касающаяся круга на растяжение и круга на одноосное сжатие. Она справедлива только в области ее определения [6].

Уравнение линейной огибающей обычно принимается [7] в виде:

$$\tau = a\sigma + b, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{\sigma_c - \sigma_p}{2\sqrt{\sigma_c \sigma_p}}; \quad b = \frac{1}{2} 2\sqrt{\sigma_c \sigma_p}. \tag{9}$$

Как уже упоминалось, с достаточной степенью точности огибающую Протождяконова можно аппроксимировать линией тренда в виде полинома второй степени (см. рисунок 1). Следовательно, для практических расчетов вместо линейной огибающей в области от одноосного растяжения до одноосного сжатия ее можно задать в виде параболы:

$$\tau = -g\sigma^2 + e\sigma + f . \quad (10)$$

Для определения коэффициентов  $g, e, f$  можно использовать следующие условия.

Первое условие: в уравнении параболы в качестве независимых переменных следует ввести координаты  $(\sigma_{oc}, \tau_{oc})$  точки касания круга на одноосное сжатие:

$$\tau_{oc} = \frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha_0 , \quad \sigma_{oc} = \frac{1}{2}\sigma_c (1 - \cos 2\alpha_0) , \quad (11)$$

где  $\alpha_0$  – угол среза, отсчитываемый от направления главного напряжения  $\sigma_1$ .

Второе условие – касание огибающей круга на одноосное сжатие:

$$\left. \frac{\partial \tau}{\partial \sigma} \right|_{c=0} = ctg 2\alpha_0 . \quad (12)$$

Третье условие – использование координат  $(\sigma_{op}, \tau_{op})$  точки касания огибающей круга на осевое растяжение:

$$\tau_{op} = \frac{1}{2}\sigma_p \sin 2\alpha_0 , \quad \sigma_{op} = \frac{1}{2}\sigma_p (1 + \cos 2\alpha_0) , \quad (13)$$

где угол  $\alpha_0$  в качестве первого приближения принимается одинаковым для указанного сжатия и растяжения.

Предварительно укажем, как можно задать угол среза  $\alpha_0(c)$ .

Угол среза при произвольном виде напряженного состояния ( $c$ ) может быть вычислен по координатам  $(\sigma, \tau)$  точек касания огибающей кругов Мора:

$$\sigma = \frac{1}{2}((1+c)\sigma_1 - (1-c)\sigma_1 \cos 2\alpha_0); \quad \tau = \frac{1}{2}(1-c)\sigma_1 \sin 2\alpha_0 . \quad (14)$$

Можно использовать либо имеющиеся табличные (экспериментальные) значения  $\sigma$  и  $\tau$  по отдельности, либо их совокупность, что составляет:

$$\cos 2\alpha_0^\sigma = \frac{(1+c)\sigma_1 - 2\sigma}{(1-c)\sigma_1} , \quad \sin 2\alpha_0^\tau = \frac{2\tau}{(1-c)\sigma_1} , \quad (15)$$

$$tg 2\alpha_0^{\sigma,\tau} = \frac{2\tau}{(1+c)\sigma_1 - 2\sigma} , \quad (16)$$

где обозначено  $\alpha_0^\sigma = \alpha_0(c, \sigma)$ ,  $\alpha_0^\tau = \alpha_0(c, \tau)$ ,  $\alpha_0^{\sigma,\tau} = \alpha_0(c, \sigma, \tau)$ .

В точках касания огибающих, соответствующих ориентации плоскости среза для каждого вида напряженного состояния, при обработке экспериментальных данных [5] проведены касательные, и для

этих касательных определен угол внутреннего трения ( $\rho$ ,  $tg\rho = \frac{\partial\tau}{\partial\sigma}$ ) ([5, Приложение 5]). Из картины такого построения следует, что

$$tg\rho = ctg2\alpha_0 . \quad (17)$$

Сравним значения  $\alpha_0(c)$  угла среза, вычисленные по формулам (15), (16) и (17) (обозначим  $\alpha_0^p$ ), с непосредственно измеренными в эксперименте величинами угла среза ( $\alpha_0^e$ ) для рассматриваемого материала (для талькохлорита). В пределах естественной погрешности измерений все отмеченные значения  $\alpha_0(c)$  мало отличаются между собой (таблица 1). При  $c > 0,233$  значения  $\alpha_0^e$  в [5] отсутствуют. Как следует из исследований Б.Г. Тарасова [8], для большинства изученных им горных пород при  $c \rightarrow 1/3$  угол среза составляет  $\alpha_0^e = 45^\circ$ .

Таким образом, при наличии значений угла среза  $\alpha_0(c)$  условия (11), (12), (13) составляют (с учетом введенных обозначений) следующую систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \tau_{oc} = -g\sigma_{oc}^2 + e\sigma_{oc} + f \\ -2g\sigma_{oc} + e = ctg2\alpha_0|_{c=0} \\ \tau_{op} = -g\sigma_{op}^2 + e\sigma_{op} + f \end{cases} . \quad (18)$$

Принимая исходные данные ( $\sigma_p = 130$ ,  $\sigma_c = 945$  и  $\alpha_0^e = 27^\circ$ ) для талькохлорита [5], из системы уравнений (18), получим:

$$g = 0,0012838; \quad e = 1,2178; \quad f = 192,0403.$$

В области трехосного сжатия также можно использовать уравнение параболы вида (10), задав напряжения  $\sigma_i(c)$  и  $\tau_i(c)$  при трех видах напряженного состояния, а именно:

$$\begin{aligned} c = 0; \quad \sigma_0 = 189; \quad \tau_0 = 378; \\ c = 0,321; \quad \sigma_{(1)} = 1700; \quad \tau_{(1)} = 980; \\ c = 0,51; \quad \sigma_{(2)} = 4000; \quad \tau_{(2)} = 1320. \end{aligned} \quad (19)$$

В результате получим следующую систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \tau_o = -g_c\sigma_o^2 + e_c\sigma_o + f_c \\ \tau_{(1)} = -g_c\sigma_{(1)}^2 + e_c\sigma_{(1)} + f_c \\ \tau_{(2)} = -g_c\sigma_{(2)}^2 + e_c\sigma_{(2)} + f_c \end{cases} , \quad (20)$$

где координаты огибающей, с индексами, соответствующими виду напряженного состояния (т. е.  $\sigma_i(c)$  и  $\tau_i(c)$ ), представлены в [5, Приложение 5]. Из решения системы уравнений (20), получаем:  $g_c = 0,0000658$ ;  $e_c = 0,52262$ ;  $f_c = 281,5737$ .

На рисунке 3 приведена (в соответствии с [5, Приложение 5]) эмпирическая огибающая (сплошная линия № 1) в области от одноосного сжатия и при реализованных в опыте видах трехосного сжатия, и расчетная огибающая, построенная отдельно от одноосного растяжения до одноосного сжатия

Таблица 1 – Значения угла среза  $\alpha_0(c)$  (в градусах) в зависимости от имеющихся экспериментальных данных

c	$\alpha_0^e$	$\alpha_0^p$	$\alpha_0^\sigma$	$\alpha_0^\tau$	$\alpha_0^{\sigma,\tau}$
0	27	27,5	27.38993	27.81437	27,52865
0.069	26	29,5	30.0909	30.7502	30,24909
0.116	31	31,5	31.11872	36.46648	32,01078
0.178	30	33,5	32.56773	39.94741	33,43634
0.233	36	36,5	37.15743	39.35101	37,29342
0.321	-	40	40.66469	-	40.85491
0.407	-	41	41.26194	40.71777	41.25203
0.51	-	42	42.06307	39.7362	42.02872

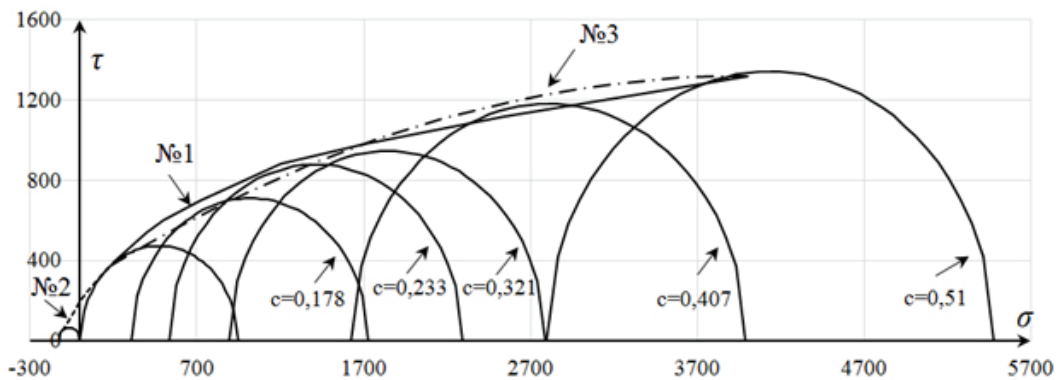


Рисунок 3 – «Поэтапное» построение огибающей наибольших кругов Мора для талькохлорита (пунктирная линия № 2), и построенная по трем «опорным точкам» (штрихпунктирная линия № 3) – от одноосного сжатия и при указанных выше двух видах трехосного сжатия.

**Заключение.** Таким образом, в отличие от линейной огибающей, предлагаемая огибающая в виде параболы в области от одноосного растяжения до одноосного сжатия, позволяет продолжить ее и в область трехосного сжатия, соблюдая условия сопряжения этих двух ветвей огибающей. При этом сокращается число исходных экспериментальных данных трехосного сжатия и упрощается процедура численных вычислений без привлечения каких-либо дополнительных табулированных функций. Но необходимым дополнительным условием является наличие значений угла среза при использованных для расчета видах напряженного состояния. Показано, как для этого использовать соответствующие экспериментальные данные, представленные в монографии [5] для большого количества разнообразных горных пород.

Таким образом, использование предложенного в [9] нового критерия прочности на основе конкретизации теории прочности Мора [10], вместо критерия М.М. Протоdjаконова, является довольно перспективным.

**Литература**

1. ГОСТ 21153.3–88. Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии. М.: Изд-во стандартов, 1988. 16 с.
2. ГОСТ 21153.3–85. Породы горные. Метод определения предела прочности при одноосном растяжении. М.: Изд-во стандартов, 1986. 18 с.

3. ГОСТ 21153.2–84. Породы горные. Метод определения предела прочности при одноосном сжатии. М.: ИПК Изд-во стандартов, 1984. 8 с.
4. Протодьяконов М.М. Обобщенное уравнение огибающих к предельным кругам напряжений Мора / М.М. Протодьяконов // Сб. Исследование физико-механических свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 27–38.
5. Ставрогин А.Н. Пластичность горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. М.: Недра, 1979. 301 с.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформирования твердого тела / Ю.Н. Работнов. М.: Наука, 1979. 743 с.
7. Свойства горных пород и методы их определения / Е.И. Ильницкая, Р.И. Тедер, Е.С. Ватолин и др. М.: Недра, 1969. 392 с.
8. Тарасов Б.Г. Закономерности деформирования и разрушения горных пород при высоких давлениях: автореф. дис... д-ра техн. наук / Б.Г. Тарасов. СПб., 1991. 46 с.
9. Дуйшеналиев Т.Б. Уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений / Т.Б. Дуйшеналиев, К.Т. Койчуманов. Бишкек: Илим, 2006. 130 с.
10. Zhigalkin V.M. Estimation of strength properties of rock samples in terms of calculated mohrs envelopes / V.M. Zhigalkin, O.M. Usoltseva, P.A. Tsoi, B.A. Rychkov, M.K. Chynybaev // Journal of Mining Science. 2011. Т. 47. № 6. С. 714–721.