УДК 515.126 DOI: 10.36979/1694-500X-2021-21-8-3-6

О СЧЕТНО КОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Ж. Жеенбай, К. Ишмахаметов

Отмечена особая роль счетной компактности в математике как одной из граней компактности и как элемента топологической техники. Следует отметить, что в конструкциях функционального анализа понятие счетной компактности получает предпочтение. Понятие счетной компактности определено для отображений и получен ряд результатов для этих отображений: отображение компактно тогда и только тогда, когда оно счетно-компактно и финально-компактно, даны некоторые критерии счетной компактности отображений, счетная компактность наследуется по замкнутым подотображениям, непрерывный образ счетно-компактного отображения является счетно-компактным, совершенный прообраз счетно-компактного отображения является таким же отображением.

Ключевые слова: топологическое пространство; непрерывное отображение; счетная компактность; покрытие.

САНАЛМА КОМПАКТТУУ ЧАГЫЛДЫРУУЛАР ЖӨНҮНДӨ

Ж. Жеенбай, К. Ишмахаметов

Компакттуулуктун бир тарабы жана топологиялык технологиянын элементи катары математикада саналма компакттуулуктун өзгөчө ролу белгиленген. Белгилей кетүү керек, функционалдык талдоо жүргүзүүнүн конструкцияларында саналма компакттуулук түшүнүгү артыкчылыкка ээ. Сунушталуучу иште саналма компакттуулук түшүнүгү чагылдыруулар үчүн аныкталган жана ушул чагылдыруулар үчүн бир катар жыйынтыктар алынган: саналма компакттуу жана финалдык компакттуу болгондо гана чагылдыруу компакттуу болот, чагылдыруунун саналма компакттуу болушунун айрым критерийлери берилген, саналма компакттуу чагылдыруулардын туюк камтылган чагылдыруулары да саналма компакттуу болору көрсөтүлгөн, саналма чагылдыруунун үзгүлтүксүз элеси да саналма болору жана саналма чагылдыруунун кынтыксыз баштапкы элесинин саналма экендиги далилденген.

Түйүндүү сөздөр: топологиялык мейкиндик; үзгүлтүксүз чагылдыруу; саналма компакттуулук; жабуу.

COUNTABLE COMPACTNESS FOR MAPPINGS

Zh. Zheenbai, K. Ishmakhametov

The special role of countable compactness in mathematics is noted as one of the facets of compactness and as an element of topological technology. It should be noted that in the constructions of functional analysis the concept of countable compactness is preferred. The notion of countable compactness is defined for mappings and the following results are obtained for these mappings: a mapping is compact if and only if it is countably compact and finally compact; some criteria for a countable compactness of mappings are given; countable compactness is inherited from closed submaps; a continuous image of a countably compact mapping is countably compact, and the perfect preimage of a countably compact map is such a map itself.

Keywords: topological spaces; continuous map; countable compactness; cover.

В предлагаемой статье понятие счетной компактности пространств распространено на отображения и для отображений доказаны аналоги некоторых хорошо известных утверждений о пространствах.

Под пространством понимается топологическое пространство, под отображением – непрерывное отображение пространств.

Определение 1. Отображения $f : X \to Y$ называются счетно-компактным, если из любого счетного открытого в X покрытия ω слоя $f^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ можно выделить конечное подпокрытие ω'. Из этого определения сразу вытекает, что каждое компактное отображение [1] счетно-компактно, но оно обратное и, вообще говоря, неверно. Однако имеет место.

Теорема 1. Отображение $f : X \to Y$ является компактным в том и только том случае, если оно счетно-компактно и финально-компактно [2, 3].

Как известно, что для системы $\omega = \{M_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X считается $\cup\omega = \cup\{M_\alpha : \alpha \in A\} = \underset{\alpha\in A}{\cup} M_\alpha$ и $\cap\omega = \cap\{M_\alpha : \alpha \in A\} = \underset{\alpha\in k}{\cap} M_\alpha$.

Теорема 2. Отображение $f : X \to Y$ счетно-компактно тогда и только тогда, когда для каждого $y \in Y$ любое счетное семейство замкнутых в X подмножеств $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ со свойством $\cap F \cap F^{-1}y = \varnothing$, имело такое конечное подсемейство $F' = \{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}\}$, что $\cap F' \cap f^{-1}y = \varnothing$.

Замечание. Здесь и далее через A обозначено множество натуральных чисел, то есть $A = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $f : X \to Y$ счетно-компактно, $y \in Y$ произвольная точка и $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$, произвольное семейство замкнутых в X подмножеств со свойством $\cap F \cap f^{-1}y = \varnothing$. Множества $U_\alpha = X \setminus F_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ открыты в X и, поскольку

$$\underset{\alpha\in\mathbb{N}}{\cup} U_\alpha = \underset{\alpha\in\mathbb{N}}{\cup} (X \setminus F_\alpha) = X \setminus \underset{\alpha\in\mathbb{N}}{\cap} F_\alpha = X \setminus \cap F \supseteq f^{-1}y,$$

то семейство $\omega = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ есть счетное открытое в X покрытие слоя $f^{-1}y$. Из счетной компактности отображения f следует существование конечного подпокрытия $\omega' = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$, покрытия $\omega : \cup\omega' \supset f^{-1}y$. Тогда для семейства

$$F = \{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}\} \subset F,$$

где $F_{\alpha_i} = X \setminus U_{\alpha_i}, i = 1, 2, ..., n$
выполняется условие:

$$\cap F' \cap f^{-1}y = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \cap f^{-1}y = \varnothing.$$

Достаточность. Пусть $y \in Y$ и $\omega = \{U_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ – произвольное счетное открытое в X покрытие слоя $f^{-1}y$: $\cup\omega = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha \supseteq f^{-1}y$. Множества $F_\alpha = X \setminus U_\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ замкнуты в X и $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} F_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} (X \setminus U_\alpha) = X \setminus (\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} U_\alpha)$, следовательно, $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} F_\alpha \bigcap f^{-1}y = \varnothing$. По условию существует конечное подсемейство $F = \{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}\}$ семейства $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ с условием:

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \cap f^{-1}y = \cap F' \cap f^{-1}y = \varnothing.$$

Для подсемейства $\omega' = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$, где $U_{\alpha_i} = X \setminus F_{\alpha i}, i = 1, 2, ..., n$ имеем:

$$\cup\omega' = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus F_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \supseteq f^{-1}y,$$

т. е. подсемейство $\omega' = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ есть конечное подпокрытие покрытия ω. Теорема доказана.

Определение 2. Система множеств $M = \{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ называется центрированной относительно множества B, если любое конечное число элементов $\{M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}, ..., M_{\alpha_n}\}$ этой системы обладает свойством $\bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \cap B = \varnothing$.

Теорема 3. Для счетной компактности отображения $f : X \to Y$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $y \in Y$ всякая счетно-центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ замкнутых в X подмножеств обладала свойством $\cap F \cap f^{-1}y \neq \varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $f : X \to Y$ счетно-компактно, $y \in Y$ произвольная точка и $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ есть счетно-центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система замкнутых в X подмножеств. Тогда $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} F_\alpha \cap f^{-1}y \neq \varnothing$, ибо в противном случае в силу счетной компактности отображения f и теоремы 1 нашлась бы конечная подсистема $F' = \{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}\}$ со свойством $\cap F' \cap f^{-1}y = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \cap f^{-1}y = \varnothing$. А это невозможно, поскольку система $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ счетно-центрирована.

Достаточность. Пусть $y \in Y$ и $F = \{F_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ – произвольная счетная система замкнутых в X подмножеств со свойством $\cap F' \cap f^{-1}y = \bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}} F_\alpha \cap f^{-1}y = \varnothing$. Тогда она будет содержать такую конечную подсистему $F' = \{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ..., F_{\alpha_n}\} \subset F$, что $\cap F' \cap f^{-1}y = \bigcap_{i=-1}^{n} F_{\alpha_i} \cap f^{-1}y = \varnothing$, ибо в противном случае система $F=\{F_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ была бы центрированной относительно слоя $f^{-1}y$ и, по условию, обладала бы свойством $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}}F_\alpha\cap f^{-1}y\neq\varnothing$. Итак, для каждого $y\in Y$ любая счетная система $F=\{F_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ замкнутых в X подмножеств со свойством $\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}}F_\alpha\cap f^{-1}y=\varnothing$ содержит такую конечную подсистему $F'=\{F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},...,F_{\alpha_n}\}$, что $\bigcap_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}\cap f^{-1}y=\varnothing$ и поэтому, в силу теоремы 1 отображение *f* счетно-компактно. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $f:X\to Y$ счетно-компактно и $f_1:X_1\to Y$ его замкнутое подотображение, то f_1 также счетно-компактно.

Доказательство. Пусть $f_1:X_1\to Y$ замкнутое подотображение отображения $f:X\to Y$, т. е. X_1 замкнуто в X и $f_1:X_1\to Y$ сужение отображения f на подмножестве $X_1\subset X$. Далее, пусть $y\in Y$ и рассмотрим произвольную счетную центрированную относительно слоя $f_1^{-1}y$ систему $F=\{F_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ замкнутых в X_1 множеств. Поскольку X_1 замкнуто в X, то эта система будет также и счетной центрированной относительно слоя $f^{-1}y$ системой замкнутых в X множеств, и в силу счетной компактности отображения f обладает свойством $\cap F\cap f^{-1}y\neq\varnothing$. Так как $F_\alpha\subset X_1$ для каждого $\alpha\in\mathbb{N}$, то $\cap F=\bigcap_{\alpha\in\mathbb{N}}F_\alpha\subset X_1$ и, поскольку $f_1^{-1}y=f^{-1}y\cap X_1$, то имеет место $\cap F\cap f^{-1}y\neq\varnothing$. Счетная компактность отображения f_1 доказана.

Следствие 2. Пусть X – топологическое пространство и $M\subset X$ его подмножество. Тогда M счетно-компактно в том и только в том случае, если любое счетное семейство замкнутых в X подмножеств $F=\{F_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ со свойством $\cap F\cap M=\varnothing$ имело такое конечное подсемейство $F'=\{F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},...,F_{\alpha_n}\}$, что $\cap F'\cap M=\varnothing$.

Следствие 3. Подмножество M топологического пространства X счетно-компактно, только тогда только тогда, если всякая счетно-центрированная относительно M система $F=\{F_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ замкнутых в X подмножеств обладало свойством $\cap F\cap M\neq\varnothing$.

Следствие 4. Пусть $f_i:X_i\to Y$ – семейство замкнутых подотображений отображения $f:X\to Y$. Тогда отображение

$$\overline{f}:\bigcup_{i=1}^{n}X_i\to Y$$

счетно-компактно только тогда, если все отображения $X_i\to Y, i=1,2,...,n$ счетно-компактны.

Доказательство. Необходимость. Пусть отображение $\overline{f}:\bigcup_{i=1}^{n}X_i\to Y$ счетно-компактно. Докажем, что отображение $f_i:X_i\to Y$, где $i\in\{1,2,...,n\}$ счетно-компактно. Поскольку X_i замкнуты в $\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ для каждого $i\in\{1,2,...,n\}$, то из следствия 1 вытекает счетная компактность отображения a_i.

Достаточность. Пусть отображения $f_i:X\to Y, i=1,2,...,n$ счетно-компактны. Докажем тогда, что и отображение $\overline{f}:\bigcup_{i=1}^{n}X_i\to Y$ счетно-компактно. Пусть $y\in Y$ и $\omega=\{O_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ произвольное счетное открытое в $\bigcup_{i=1}^{n}X_i$ покрытие слоя $\overline{f}^{-1}y$. Так как $f_i^{-1}y\subset\overline{f}^{-1}y$ для каждого $i=1,2,...,n$, то $\omega\cap f_i^{-1}y=\{O_\alpha\cap f_i^{-1}y:\alpha\in A\}$ является счетным открытым в X_i покрытием слоя $f_i^{-1}y=\overline{f}_i^{-1}y\cap X_i$ для каждого $i=1,2,...,n$. Отображение f_i счетно-компактно, поэтому из покрытия $\omega\cap f_i^{-1}y$ можно выделить конечное подпокрытие $\{O_{\alpha_1 i}\cap f_i^{-1}y,O_{\alpha_2 i}\cap f_i^{-1}y,...,O_{\alpha_k i}\cap f_i^{-1}y\}$ слоя $f_i^{-1}y$. Тогда семейство $\{O_{\alpha_1 i},O_{\alpha_2 i},...,O_{\alpha_k i}:i=1,2,...,n\}$ есть конечное подпокрытие покрытия ω. Счетная компактность отображения $\overline{f}$ доказана.

Теорема 4. Пусть даны отображения: $f:X\to Y$, $g:Z\to Y$, $h:X\to Z$ и $f=g\circ h$. Тогда, если отображение f счетно-компактно, то счетно-компактно и отображение g.

Доказательство. Пусть $y\in Y$ и $\omega=\{O_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ счетное открытое в Z покрытие слоя $g^{-1}y$. Семейство $h^{-1}\omega=\{h^{-1}O_\alpha:\alpha\in\mathbb{N}\}$ является счетным открытым в X покрытием слоя $f^{-1}y=h^{-1}(g^{-1}y)$. Отображение f счетно-компактно, следовательно, из покрытия $h^{-1}\omega$ можно выделить конечное подпокрытие $\{h^{-1}O_1,h^{-1}O_2,...,h^{-1}O_n\}$. Тогда семейство $\{O_1,O_2,...,O_n\}$ есть конечное подпокрытие покрытия ω, т. е. отображение g является счетно-компактным.

Теорема 5. Отображения $f:X\to Y$ только тогда счетно-компактно, если для каждого $y\in Y$ всякая счетная центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система (любых) множеств $\sigma=\{M\}$, $M\subseteq X$ удовлетворяла условию $\bigcap_{M\in\sigma}[M]\bigcap f^{-1}y\neq\varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $y\in Y$ и $\sigma=\{M\}$ любая счетная центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система. Тогда и система $\overline{\sigma}=\{[M]\}$ будет счетной центрированной относительно слоя $f^{-1}y$, и в силу счетной компактности отображения *f* и теоремы 3 выполняется условие $\bigcap_{M\in\sigma}[M]\bigcap f^{-1}y\neq\varnothing$.

Достаточность. Так как для каждого $y\in Y$ всякая счетная центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система $\overline{\sigma}=\{[M]\}$ удовлетворяет условию $\bigcap_{M\in\sigma}[M]\bigcap f^{-1}y\neq\varnothing$, то и любая счетная центрированная относительно слоя $f^{-1}y$ система $\sigma=\{F\}$ замкнутых множеств удовлетворяет условию $\bigcap_{F\in\sigma}F\bigcap f^{-1}y\neq\varnothing$. Поэтому, по той же теореме 3 отображение *f* будет счетно-компактным. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть даны отображения $f:X\to Y$, $g:Z\to Y$, $\lambda:X\to Z$ и выполняется условие $f=g\circ\lambda$, где λ совершено на отображение. Если отображение g счетно-компактно, то и отображение *f* счетно-компактно.

Сначала приведем следующую очевидную лемму.

Лемма 1. Пусть дано отображение $f:X\to Y$ и счетное открытое в X покрытие $\omega=\{O_\alpha\},\alpha\in A$ слоя $f^{-1}y$, $y\in Y$ $\omega\supseteq f^{-1}y$. Далее, пусть система ωf получается из системы ω заменой каждого множества O_a конечным набором открытых в X множеств O_α^1, …, $O_\alpha^{S(\alpha)}$, в сумме дающих O_a. Тогда система ωf является открытым в X покрытием слоя $f^{-1}y$ и, кроме того, если покрытие ω было конечным, то таким же будет и покрытие ωf.

Определение 3 [3]. Пусть X произвольное множество и $\sigma=\{M\}$ произвольная система подмножеств множества X. Объединение всех $M\in\sigma$ называется телом системы σ и обозначается через $\overline{\sigma}$. Таким образом, $\overline{\sigma}=\bigcup_{M\in\sigma}M=\bigcup_{M\in\sigma}M$, и очевидно, что $\overline{\sigma}\subseteq X$.

Переходим к доказательству теоремы 6.

Доказательство. Пусть $y\in Y$ и $\upsilon=\{V_\beta\}$ – произвольное счетное открытое в X покрытие слоя $f^{-1}y=\lambda^{-1}(g^{-1}y): f^{-1}y\subseteq\overline{\upsilon}$. Так как для любого $z\in g^{-1}y$ множество $\lambda^{-1}z\subseteq f^{-1}y$ компактно в силу совершенности отображения λ и $\lambda^{-1}z\subseteq\overline{\upsilon}$, т. е. υ является открытым в X покрытием слоя $\lambda^{-1}z$, то существует такая конечная подсистема υ_z системы υ, что $\lambda^{-1}z\subseteq\overline{\upsilon_z}$. Отображение λ замкнуто, поэтому существует окрестность O_z точки z в Z, прообраз $\lambda^{-1}O_z$ которой содержится в $\tilde{\upsilon}_2$. Семейство $\{O_z\}$, $z\in g^{-1}y$ является открытым в Z покрытием слоя $g^{-1}y$. В силу предположения теоремы 6 относительно отображения g, в покрытие $\{O_z\}$ слоя $g^{-1}y$ впишем конечное открытое в Z покрытие $\{U_\alpha\}$, $\alpha\in A$ слоя $g^{-1}y$. Каждый элемент покрытия $\omega=\{O_\alpha=\lambda^{-1}U_\alpha\}$ слоя $\lambda^{-1}(g^{-1}y)=f^{-1}y$ содержится хотя бы в одном множестве υ_z. Выберем для каждого α одно множество $\overline{\upsilon_\alpha}=\overline{\upsilon_z}(\alpha)$, содержащее множество O_α.

Пусть $\upsilon_2=\{V_{\beta_1}^\alpha,\ldots,V_{\beta_s}^\alpha\}$. Положим: $O_{\beta_i}^\alpha=V_{\beta_i}^\alpha\bigcap O_\alpha, i=1,\ldots,s(\alpha)$. В силу леммы 1 покрытие $\omega\lambda$, состоящее из множеств $O_{\beta_i}^\alpha$, $i=1,\ldots,s(\alpha)$, $\alpha\in A$, является конечным. Кроме того, покрытие $\omega\lambda$ вписано в покрытие υ. Теорема 5 доказана.

Следствие 5. Пусть дано непрерывное на отображение $f:X\to Y$. Тогда, если X – счетно-компактно, то счетно-компактно и пространство *Y*.

Следствие 6. Если дано совершенное на отображение $f:X\to Y$, то из счетной компактности пространства *Y* следует счетная компактность пространств *X*.

Отметим, что при постоянном отображении получаем соответствующие результаты для пространств и их непрерывных отображений: следствия 2–6.

Литература

1. *Пасынков Б.А.* О распространениях на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств / Б.А. Пасынков // Отображения и функторы. М: Изд-во МГУ, 1984. С. 72–102.
2. *Ishmakhametov K.* On compact type maps / K. Ishmakhametov // Abstract of the Issyk-Kul International Mathematical Forum. Kyrgyzstan, Bosteri 24–27, 2015. June. P. 15.
3. *Александров П.С.* Введение в теорию размерности / П.С. Александров, Б.А. Пасынков. М.: Наука, 1973. 575 с.