УДК 515.126 DOI: 10.36979/1694-500X-2021-21-8-7-9

ПОНЯТИЯ ТИПА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЯ

К. Ишмахаметов

Пространства типа компактности – компактные, финально-компактные, паракомпактные, сильно паракомпактные, слабо паракомпактные и другие – занимают особое место в топологии и хорошо изучены. Они обладают многими замечательными свойствами, например наследуются по замкнутым подмножествам, переходят к образу и от образа к прообразу при “хороших” отображениях, и рядом других свойств. В работе вводятся понятия совершенного, финально совершенного, парасовершенного, сильно парасовершенного и слабо парасовершенного отображений, которые обобщают понятия бикомпактного, финально компактного, паракомпактного, сильно паракомпактного и слабо паракомпактного пространств на отображения. Доказано, что введенные отображения наследуются по замкнутым подотображениям, совершенные подотображения хаусдорфова отображения являются замкнутыми подотображениями, совершенные образы совершенных и финально совершенных отображений являются таковыми же.

Ключевые слова: топологические пространства; непрерывное отображение; совершенное отображение; финально совершенное отображение; парасовершенное отображение; сильно парасовершенное отображение; слабо парасовершенное отображение.

ЧАГЫЛДЫРУУ ҮЧҮН КОМПАКТТУУЛУК ТИБИ ТҮШҮНҮГҮ

К. Ишмахаметов

Компакттуулук тибинин мейкиндиктери – компакттуу, финалдык компакттуу, пара компакттуу, күчтүү паракомпакттуу, аз паракомпакттуу – жана башка ушул сыяктуу мейкиндиктер учурда топологияда өзгөчө орунга ээ жана терең изилденген. Алар көптөгөн эң сонун касиеттерге ээ, мисалы, бул мейкиндиктердин туюк камтылган көптүктөрү ушундай эле мейкиндиктер болушат жана бул мейкиндиктер “жакшы” чагылдыруулар учурунда элеске жана элестен баштапкы элеске өтүшөт жана башка бир катар касиеттерге ээ. Бул эмгекке чагылдыруулардагы компакттуу, финалдык компакттуу, паракомпакттуу, күчтүү паракомпакттуу жана аз паракомпакттуу мейкиндиктер түшүнүктөрүн жалпылаган кынтыксыз, финалдык кынтыксыз, паракынтыксыз, күчтүү паракынтыксыз жана аз паракынтыксыз чагылдыруулар түшүнүктөрү киргизилген. Киргизилген чагылдыруулар туюк чагылдыруулардын үстү боюнча мурасталганы, хаусдорфтук чагылдыруулардын кынтыксыз камтылган чагылдыруулары туюк камтылган чагылдыруулар болушары, кынтыксыз жана финалдык кынтыксыз чагылдыруулардын кынтыксыз элестери ушундай эле чагылдыруулар болушары далилденген.

Түйүндүү сөздөр: топологиялык мейкиндик; үзгүлтүксүз кынтыксыз; финалдык кынтыксыз; пара кынтыксыз; күчтүү пара кынтыксыз; жөнөкөй пара кынтыксыз чагылдыруулар.

COMPACTNESS TYPE NOTIONS FOR MAPPINGS

K. Ishmakhametov

Spaces of the compactness type – compact, finally compact, paracompact, strongly paracompact, weakly paracompact, and others – now occupy a special place in topology and are the most studied. They have many remarkable properties, for example, they are inherited over closed subsets, pass to the image and from the image to the inverse image under “good” mappings, and possess a number of other properties. In this paper, we introduce the concepts of perfect, finally-perfect, paraperfect, strongly paraperfect, and weakly paraperfect mappings, thus generalizing the concepts of bicompact, finally compact, paracompact, strongly paracompact, and weakly paracompact spaces onto mappings, respectively. It is proved that the introduced mappings are inherited over closed submaps, that perfect submaps of a Hausdorff map are closed submaps, and that perfect images of perfect or finally perfect mappings are perfect or finally perfect themselves.

Keywords: topological space; continuous; perfect; finally perfect; paraperfect; strongly paraperfect; weakly paraperfect maps.

В статье приведен новый вариант распространения на отображения понятий типа компактности. Пространства являются топологическими, а отображения непрерывными.

Определение 1. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ топологических пространств X и Y назовем так:

(A_1) (N−) – совершенным,

(A_2) (N−) – финально совершенным,

(A_3) (N−) – парасовершенным,

(A_4) $(N-)$ – сильно парасовершенным,

(A_5) (N−) – слабо парасовершенным,

если для любой точки $y \in Y$ и любого покрытия ω слоя $f^{-1}y$ открытыми в X множествами существуют окрестность O точки y и открытое в X (в $f^{-1}O$) покрытие ω' трубки $f^{-1}O$, вписанное в ω являющееся соответственно:

(a_1) конечным,

(a_2) счетным,

(a_3) локально конечным,

(a_4) звездно конечным,

(a_5) точечно конечным.

Таким образом, всякое совершенное отображение является финально совершенным, а также сильно парасовершенным.

В определении совершенных и финально совершенных отображений можно даже предположить, что конечное, соответственно счетное, покрытие ω' , вписанное в ω, составлено из элементов самого ω, т. е. является подпокрытием покрытия ω.

Действительно, если в покрытие ω вписано конечное, соответственно счетное покрытие ω', то каждый элемент $o_i \in \omega'$ содержится в некотором элементе O_i покрытия i. В первом случае ω пробегает конечное множество значений $i = 1, 2, ..., n$, а во втором – счетное множество значений $i = 1, 2, 3, ...$ Следовательно, система $\{O_i\}$ образует подпокрытие покрытия ω , конечное в первом, счетное во втором.

Теперь приходим к следующему определению:

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется совершенным (соответственно финально совершенным), если (*) для любой точки $y \in Y$ и любого открытого в X покрытия ω слоя $f^{-1}y$, существует окрестность O точки y , трубка $f^{-1}O$ над которой покрывается конечным (соответственно счетным) набором элементов системы ω.

Отметим что В.П. Нориным [1] была доказана равносильность условия (*) требованию бикомпактности отображения f (непрерывное, замкнутое и послойно бикомпактное отображение называется бикомпактным, то есть понятие совершенное отображение в нашем смысле совпадает с обычным совершенным отображением).

Так как звездная конечность покрытия влечет за собой его локальную конечность, то всякое сильно парасовершенное отображение, очевидно, парасовершенно. Далее, поскольку, как легко убедиться, каждое локально конечное покрытие точечно конечно, то всякое парасовершенное отображение заведомо слабо парасовершенно. Однако следует иметь в виду, что существуют слабо парасоверщенные, но не парасовершенные отображения, а также отображения, которые хоть и парасовершенны, но не сильно парасовершенны.

Отметим, что когда отображение $f : X \to Y$ постоянное, то есть когда $Y = \{p\}$ – одноточечное пространство, то совершенность, финально совершенность, парасовершенность, сильно парасовершенность, слабо парасовершенность отображения f влечет соответственно компактность, финально компактность, паракомпактность, сильно паракомпактность, слабо паракомпактность пространства X .

Предложение 1. Пусть $f_1 : X_1 \to Y$ замкнутое подотображение отображения $f : X \to Y$ (т. е. X_1 замкнуто в X) и пусть $\Omega = \{U_\alpha\}$ – какое-нибудь открытое в X покрытии слоя $f_1^{-1}y$ произвольной точки $y \in Y$.

Если f – отображение, входящее в один из классов $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4), (A_5)$ (соответственно $(A_1)-N, (A_2)-N, (A_3)-N, (A_4)-N$, $(A_5)-N$), то существуют окрестность O точки y и открытое в X (в $f^{-1}O$) покрытие ω трубки $f_1^{-1}O$, вписанное в Ω , принадлежащие соответственно классу $(a_1), (a_2), (a_3), (a_4), (a_5)$.

Доказательство. Положим: $\Omega' = \{U_\alpha\} \cup \{X \setminus X_1\}$. Тогда семейство Ω' будет открытым покрытием слоя $f^{-1}y$. Так как отображение f принадлежит к классу $(Ai), i = 1, 2, 3, 4, 5,$ то для каждой точки $y \in Y$ существуют ее окрестность O и открытое в X (в $f^{-1}O$) покрытие ω' трубки f^{-1} , вписанное в Ω', принадлежащее к классу (a_i); выбрасывая из ω' элементы, лежащие в $X \setminus X_1$, получим открытое в X (в $f^{-1}O$) покрытие ω трубки $f^{-1}O$, следовательно, и трубки f_1^{-1} , вписанное в $\Omega = \{U_\alpha\}$, принадлежащее к тому же классу (α_i). Предложение доказано.

Следствием предложения 1 является

Предложение 2. Замкнутое подотображение $f_1 : X_1 \to Y$ отображения $f : X \to Y$ класса $(A_i), i = 1,2,3,4,5$ есть отображение того же класса (A_i).

Доказательство. Пусть $\omega = \{a_\alpha\}$ – какое-нибудь открытое в X_1 покрытие слоя $f_1^{-1}y$ произвольной точки $y \in Y$. Покажем существование окрестности O точки y и вписанного в ω открытого в X_1 покрытия ω' трубки f_1^{-1} класса (a_i). Для каждого $a_\alpha \in \omega$ возьмем открытое в X множество O_α с условием $X_1 \bigcap O_\alpha = a_\alpha$. Множества O_α образуют открытое в X покрытие Ω слоя $f^{-1}y$. В силу предложения 1 существуют окрестность O точки y и принадлежащее классу (a_i) открытое в X покрытие $\gamma = \{\ _\beta\}$ трубки f_1^{-1} , вписанное в Ω; тогда множества $U_\beta = X_1 \bigcap \square_\beta$ образуют вписанное в ω, открытое в X_1 и принадлежащее классу (a_i) покрытие трубки f_1^{-1} , что и требовалось доказать.

Отметим, что предложение 2 справедливо и в случае, когда отображение f принадлежит к классу $(A_i) - N, i = 1,2,3,4,5$.

Итак, все пять свойств: совершенности, финальной совершенности, парасовершенности, сильной паросовершенности и слабой парасовершенности – наследственны по замкнутым подотображениям.

Как показано в [2], утверждение предложения 2, касающееся случая $i = 1$, допускает частичное обращение – им является следующее

Предложение 3 [2]**.** Если отображение $f : X \to Y$ хаусдорфово, а подотображение $f_1 : X_1 \to Y$ совершенно, то f_1 – замкнутое подотображение.

Теорема 1. Пусть дана коммутативная диаграмма $f = g \circ \lambda$, где $f : X \to Y, g : Z \to Y, \lambda : X \to Z$ и λ – сюррективный морфизм $[2]$. Тогда, если f совершенно (финально совершенно), то и g совершенно (финально совершенно).

Доказательство. Теорему 1 докажем в случае когда f финально совершенно. Пусть $y \in Y$ произвольная точка и $\omega = \{U_\alpha\}$ произвольное открытие в Z покрытие слоя $g^{-1}y$. Тогда семейство $\lambda^{-1}\omega = \{\lambda^{-1}U_\alpha\}$ есть открытое в X покрытие слоя $f^{-1}y = \lambda^{-1}g^{-1}y$. В силу финальной совершенности отображения f существуют окрестность O точки y и открытое в X счетное покрытие ω' трубки $f^{-1}O$ вписанное ω. В силу определения 2, можно предположить, что элементы покрытия ω имеют вид $\lambda^{-1}U_i$, $i = 1,2,3,....$ Следовательно, система $\{U_i\}$ есть счетное покрытие трубки $g^{-1}O = \lambda(f^{-1}O) = \lambda(\lambda^{-1}(g^{-1}O))$, вписанное в ω. Финальная совершенность отображения g доказана. Отметим, что совершенность отображения g ранее доказана в [2].

Из предложений 2, 3 и теоремы 1 вытекают:

Предложение 4 [3]. Пусть отображение $f : X \to Y$ совершенно, отображение $g : Z \to Y$ хаусдорфово и λ есть морфизм f в g. Тогда λ есть совершенный морфизм.

Предложение 5 [1]. Если в условиях предложения 4 морфизм $\lambda : f \to g$ инъективен, тогда λ есть замкнутое вложение. Если морфизм λ биективен, то λ – есть изоморфизм.

Литература

1. *Мусаев Д.К.* О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений / Д.К. Мусаев, Б.А. Пасынков. Ташкент: Изд-во “ФАН”, 1994.
2. *Пасынков Б.А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств / Б.А. Пасынков // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 72–102.
3. *Ульянов В.М.* О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах / В.М. Ульянов // Матем. сб. 1975. Т. 98 (140). № 2 (10). С. 223–254.