УДК 517.926+517.923
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-4-15-21

ПРЯМОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев

Аннотация. Показано, как, используя разработанный авторами метод «Цепочка», решаются линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Доказано, что в виде цепочки уравнений первого порядка можно представить не только уравнения с постоянными коэффициентами, но и некоторые уравнения с переменными коэффициентами, в частности, уравнения Эйлера. Показано, что возможность разложения в цепочку произвольного линейного уравнения второго порядка определяется разрешимостью в квадратурах соответствующего уравнения Риккати. Важное место в работе занимает изложение нового метода решения некоторого семейства уравнений Риккати.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; решение уравнений с переменными коэффициентами; уравнения Эйлера; уравнения Риккати; интегрируемость в квадратурах; новый метод решения.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЖАНА РИККАТИ ТЕҢДЕМЕСИНИН ТҮЗ ИНТЕГРАЦИЯЛОО

А.Б. Урдалетова, С.К. Кыдыралиев

Аннотация. Макалада авторлор тарабынан иштелип чыккан «Чынжырча» ыкмасы аркылуу кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелердин чыгарылышы көрсөтүлгөн. Туруктуу коэффициенттүү теңдемелерди гана эмес, коэффициенти өзгөрүлмөлүү кээ бир теңдемелерди да, атап айтканда Эйлер теңдемелерин биринчи тартиптеги теңдемелердин чынжырчасы катары көрсөтүүгө боло тургандыгы далилденген. Ыктыярдуу экинчи тартиптеги сызыктуу теңдеменин чынжырына ажыратуу мүмкүнчүлүгү тиешелүү Риккати теңдемесинин квадратураларындагы чечилиши менен аныктала тургандыгы көрсөтүлгөн. Эмгекте Риккати теңдемелеринин айрым түрлөрүн чыгаруунун жаңы ыкмасын көрсөтүү маанилүү орунду ээлейт.

Түйүндүү сөздөр: кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелер; өзгөрүлмө коэффициенттүү теңдемелерди чыгаруу; Эйлер теңдемелери; Риккати теңдемелери; квадратуралардагы интегралдуулук; жаңы чыгаруу ыкмасы.

DIRECT INTEGRATION OF LINEAR EQUATIONS SECOND ORDER AND RICCATI EQUATIONS

A.B. Urdaletova, S.K. Kydyraliev

Abstract. It is shown how linear ordinary differential equations are solved using the "Chain" method developed by the authors. It is proved that not only equations with constant coefficients, but also some equations with variable coefficients, in particular, the Euler equations, can be represented in the form of a chain of first-order equations. It is shown that the possibility of expanding an arbitrary linear second-order equation into a chain is determined by the solvability in quadratures of the corresponding Riccati equation. An important place in this work is occupied by the presentation of a new method for solving a certain family of Riccati equations.

Keywords: linear ordinary differential equations; solution of equations with variable coefficients; Euler equations; Riccati equations; integrality in quadratures; new solution method.

Развитие почти всех наук сопровождается все более широким использованием математики в целом, и дифференциальных уравнений в частности. Поэтому, особое значение приобретают методы, позволяющие непосредственно, без использования общей теории, интегрировать в квадратурах обыкновенные дифференциальные уравнения. К числу таких методов относится метод разложения линейных уравнений высоких порядков в последовательность линейных уравнений первого порядка. Этот метод всегда можно применять для решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, а также для некоторых уравнений с переменными коэффициентами. В случае таких уравнений, возможность разложения определяется интегрируемостью соответствующих уравнений Риккати. Поэтому большое значение имеет новый метод решения некоторого семейства уравнений Риккати, предлагаемый в работе.

1. Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое можно привести к виду:

$$y' + a(x)y = b(x), \tag{1}$$

где y – неизвестная функция, зависящая от аргумента x; коэффициенты $a(x)$; $b(x)$ – заданные функции.

Для того чтобы решить уравнение (1) методом прямого интегрирования, достаточно заметить, что имеет место равенство: $y' + a(x)y = \left(ye^{\int a(x)dx}\right)' e^{-\int a(x)dx}$.

Поэтому уравнение (1) можно решить, «свернув» левую часть, а затем, последовательно перенося множители в правую часть и интегрируя [1].

Пример 1

Решим начальную задачу вида:

$$y' - 2y = 19x^{0.9}e^{2x}, \qquad y(0) = 6 . \tag{2}$$

Так как $e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$, уравнение (2) можно переписать в виде $\left(ye^{-2x}\right)' e^{2x} = 19x^{0.9}e^{2x}$.

Поэтому

$\left(ye^{-2x}\right)' = 19x^{0.9} <=> ye^{-2x} = 10x^{1.9} + C <=> y = \left(10x^{1.9} + C\right)e^{2x}$.

Воспользовавшись начальным условием задачи, получим:

$y(0) = 6 = (0 + C)\cdot 1$. Отсюда, $C = 6$ и $y = \left(10x^{1.9} + 6\right)e^{2x}$.

2. Разложив обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в «цепочку» уравнений первого порядка, можно получить формулу, позволяющую написать общее решение этого уравнения. Напомним суть метода «Цепочка» [2, 3].

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

с постоянными коэффициентами p и q, можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z' - kz = f(x), \tag{3.1}$$

$$y' - my = z, \tag{3.2}$$

где коэффициенты k и m являются корнями алгебраической системы:

$$\begin{cases} k + m = -p, \\ k \cdot m = q. \end{cases}$$

В справедливости утверждения легко убедиться, подставив значение z из (3.2) в (3.1), и приравняв коэффициенты при y' и y к соответствующим коэффициентам в (3).

Процесс представления исходного уравнения второго порядка в виде двух уравнений первого порядка будем называть методом цепочки.

Пример 2

Проинтегрируем уравнение:

$$y'' - 6y' + 9y = 42x^5e^{3x}. \qquad (4)$$

Для того чтобы разложить его в цепочку уравнений, решим систему:

$$\begin{cases} k + m = 6, \\ k \cdot m = 9, \end{cases}$$

и получим: $k = m = 3$.

Таким образом, имеет место цепочка уравнений:

$$z' - 3z = 42x^5e^{3x}, \qquad (4.1)$$

$$y' - 3y = z. \qquad (4.2)$$

Перепишем уравнение (4.1) в виде:

$$(ze^{-3x})'e^{3x} = 42x^5e^{3x}.$$

Следовательно, $(ze^{-3x})' = 42x^5$, и $ze\text{-}3x = 7x^6 + C_1$.

Тогда уравнение (4.2) примет вид:

$$y' + 2y = e^{3x}(7x^6 + C_1).$$

Запишем его в виде:

$$(ye^{-3x})' = 7x^6 + C_1,$$

проинтегрируем, и получим:

$$ye^{-3x} = x^7 + C_1 x + C_2.$$

Итак, общим решением уравнения (4) является функция:

$$y = e^{3x}(x^7 + C_1 x + C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

3. Уравнения с переменными коэффициентами. Успех, достигнутый при решении уравнений с постоянными коэффициентами, позволяет предположить, что подобный результат может иметь место и для уравнений с переменными коэффициентами. Попробуем пройти подобным путем. Для этого предположим, что уравнение

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \qquad (5)$$

где $b(x)$, $c(x)$, $f(x)$ – некоторые непрерывные функции, представлено в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z' - p(x)z = f(x), \qquad (5.1)$$

$$y' - q(x)y = z. \qquad (5.2)$$

Подставив выражение для z из (5.2) в (5.1), получим:

$$y'' - q'(x)y - q(x)y' - p(x)[y' - q(x)y] = f(x),$$

и, приравняв коэффициенты при одинаковых производных y, получим:

$$\begin{cases} -p(x) - q(x) = b(x), \\ p(x)q(x) - q'(x) = c(x). \end{cases} \tag{5.3}$$

Теперь выразим функцию *p(x)* из 1-го уравнения системы (5.3), и, подставив во 2-е, получим, что для нахождения функции *q(x)* и затем *p(x)* через коэффициенты уравнения (5), необходимо решить уравнение: $q'(x)+q(x)b(x)+q^2(x)=-c(x)$. Но это уравнение является уравнением Риккати относительно неизвестной функции *q(x)*, и, как доказал Жозеф Лиувилль в 1841 г., в общем случае его решение нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций [5].

Отсюда следует известный результат [4]: к сожалению, линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами в общем виде неразрешимы в квадратурах. Поэтому необходимо сосредоточить внимание на частных случаях.

4. Использование цепочки уравнений первого порядка позволяет успешно интегрировать не только уравнения с постоянными коэффициентами, но и некоторые типы уравнений с переменными коэффициентами. К числу таких уравнений относятся уравнения Эйлера.

Теорема

Уравнение Эйлера:

$$y'' + \frac{p}{x}y' + \frac{q}{x^2}y = f(x), \tag{6}$$

где коэффициенты p и q постоянны, можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z' - \frac{k}{x}z = f(x), \tag{6.1}$$

$$y' - \frac{m}{x}y = z, \tag{6.2}$$

где коэффициенты k и m являются корнями алгебраической системы:

$$\begin{cases} k + m = -p, \\ (k+1)\cdot m = q. \end{cases}$$

Доказательство

Вычислим производную: $z' = y'' + \frac{m}{x^2}y - \frac{m}{x}y'$, и подставим значения z' и z в (6.1). Тогда: $y'' + \frac{m}{x^2}y - \frac{m}{x}y' - \frac{k}{x}(y' - \frac{m}{x}y) = f(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow y'' - (m+k)\frac{1}{x}y' + (k+1)m\frac{1}{x^2}y = f(x)$. Приравняв коэффициенты полученного уравнения и уравнения (6) убедимся в справедливости утверждения теоремы.

Пример 3

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = x^3e^x, \tag{7}$$

решим алгебраическую систему: $\begin{cases} k+m=5, \\ (k+1)\cdot m=8. \end{cases}$ и, воспользовавшись полученными корнями, разложим (7) в цепочку: $z' - \frac{3}{x}z = x^3e^x;\quad y' - \frac{2}{x}y = z$. Отсюда, так как уравнение $z' - \frac{3}{x}z = x^3e^x$ имеет общее решение: $z = x^3(e^x + C)$, решением уравнения (7) будет решение уравнения: $y' - \frac{2}{x}y = x^3(e^x + C)$.

Итак, общее решение уравнения (7): $y = x^2(xe^x - e^x + C_1x^2 + C_2)$.

5. Ранее было показано, что интегрируемость в квадратурах линейного дифференциального уравнения второго порядка определяется разрешимостью соответствующего уравнения Риккати. Рассмотрим уравнения Риккати, соответствующие уравнениям Эйлера, которые мы предлагаем называть уравнениями Эйлера–Риккати.

Теорема

Уравнение Эйлера–Риккати:

$$y' = ay^2 + \frac{b}{x}y + \frac{c}{x^2}, \tag{8}$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты, интегрируемые в квадратурах.

Доказательство

Можно пойти традиционным путем. Достаточно убедиться в том, что уравнения вида (8) имеют частное решение s/x, где значение s можно получить из уравнения: $-\frac{s}{x^2} = \frac{as^2}{x^2} + \frac{bs}{x^2} + \frac{c}{x^2}$, и использовав замену $y = z + s/x$, получить уравнение Бернулли, а затем линейное уравнение первого порядка.

Мы собираемся использовать иной подход. Умножив уравнение (8) на x^2, получим уравнение:

$$x^2y' = ax^2y^2 + bxy + c, \tag{9}$$

правая часть которого является квадратным трехчленом относительно неизвестной функции xy. Но что делать с левой частью? На помощь приходит следующее преобразование: добавим к левой и правой части уравнения (9) слагаемое xy: $x^2y' + xy = a(xy)^2 + (b+1)xy + c$, и запишем левую часть в виде: $x^2y' + xy = x(xy)'$. В итоге получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u = xy$:

$$xu' = au^2 + (b+1)u + c. \tag{10}$$

Пример 4

Решить уравнение Эйлера–Риккати:

$$y' = y^2 - \frac{9}{x}y + \frac{15}{x^2}. \tag{11}$$

Решение

Следуя изложенному выше алгоритму, умножим уравнение (11) на x^2:

$x^2y' = x^2y^2 - 9xy + 15$, добавим к обеим частям xy: $x^2y' + xy = x^2y^2 - 8xy + 15$, и, использовав обозначение u = xy, получим: $xu' = u^2 - 8u + 15$. Таким образом, имеет место равенство:

$$\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{dx}{x}. \qquad (12)$$

Так как $\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{du}{(u-3)(u-5)} = \int \frac{\frac{1}{(u-3)^2}du}{1 \cdot \frac{u-5}{u-3}} = \int \frac{-d\frac{1}{(u-3)}}{1 - \frac{2}{u-3}}$,

считая, что $\frac{1}{u-3} = v$, получаем: $\int \frac{du}{u^2 - 8u + 15} = \int \frac{dv}{2v - 1} = \frac{1}{2} ln|v - 0,5| + A == \frac{1}{2} ln\left|\frac{1}{u-3} - 0,5\right| + A$.

Поэтому, возвращаясь к исходным обозначениям, можем (12) записать в виде:

$$\frac{1}{xy - 3} - 0,5 = x^2 C \Leftrightarrow \frac{1}{xy-3} = \frac{2x^2C + 1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{2}{2x^2C + 1} + 3.$$

Следовательно, общее решение уравнения (11):

$$y = \frac{2}{2x^3C + x} + \frac{3}{x}.$$

Пример 5

Решить уравнение Эйлера–Риккати :

$$y' = y^2 - \frac{9}{x} y + \frac{17}{x^2}. \qquad (13)$$

Решение

Действуем точно так же, как при решении предыдущего уравнения:

$$x^2 y' = x^2 y^2 - 9xy + 17 \Rightarrow x^2 y' + xy = x^2 y^2 - 8xy + 17 \Rightarrow xu' = u^2 - 8u + 17,$$

где $u = xy$.

Отсюда, $\int \frac{du}{u^2 - 8u + 17} = \int \frac{dx}{x}$.

Так как $\int \frac{du}{u^2 - 8u + 17} = \int \frac{du}{(u-4)^2 + 1} = arctg(u-4) + A$, получаем, что общее решение уравнения (13) определяется достаточно экзотическим сочетанием функций: $arctg(xy - 4) = lnxC$.

6. Следует отметить, что рассуждения, использованные при решении уравнений вида (8), могут быть использованы и в некоторых других случаях.

Теорема

Уравнение Риккати, которое можно записать в виде:

$$d(x)f(x)y' = a\left(f(x)y\right)^2 + \left(bf(x) - d(x)f'(x)\right)y + c, \qquad (14)$$

где a, b, c – постоянные коэффициенты; $d(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, интегрируемые в квадратурах.

Доказательство

Если переписать уравнение (14) в виде:

$$d(x)f(x)y' + d(x)f'(x)y = a\left(f(x)y\right)^2 + bf(x)y + c$$

и ввести обозначение $u = f(x)y$, то получится уравнение с разделяющимися переменными: $d(x)u' = au^2 + (b+1)u + c$.

Пример 6

Решить уравнение:

$$y' = sinx \cdot y^2 + (6 - ctgx)y + \frac{9}{sinx}. \tag{15}$$

Решение

Умножим уравнение (15) на sinx: $sinx \cdot y' = sin^2 x \cdot y^2 + (6sinx - cosx)y + 9$; добавляем к обеим частям $cosx \cdot y$:

$sinx \cdot y' + cosx \cdot y = sin^2 x \cdot y^2 + 6sinx \cdot y + 9$ cosx·y, и использовав обозначение u = sinx·y, получим: $u' = u^2 + 6u + 9$.

Таким образом, имеет место равенство:

$$\int \frac{du}{(u+3)^2} = \int dx.$$

Поэтому, $\frac{-1}{sinx \cdot y + 3} - 0,5 = x - C \iff sinx \cdot y + 3 = \frac{1}{C - x}$.

Следовательно, общее решение уравнения (15): $y = \frac{1}{sinx}\left(\frac{1}{C - x} - 3\right)$.

Заключение. Получение в явном виде решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений является важнейшим элементом обучения математике будущих специалистов: инженеров, экономистов и др. Очень часто соответствующие курсы перегружены длинными предварительными рассуждениями о линейной независимости частных решений, базисе и т. п.

Подход, предлагаемый в данной работе, позволяет приобщиться к миру дифференциальных уравнений, решения которых можно «потрогать руками», не требуя глубоких предварительных знаний. Непосредственная связь между уравнениями второго порядка и уравнениями Риккати, продемонстрированная в работе, может послужить основой для проведения исследовательской работы начинающими научную деятельность специалистами.

Поступила: 03.01.22; рецензирована: 10.01.22; принята: 17.01.22.

Литература

1. *Kydyraliev S.K.* Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // The College Mathematics Journal, USA. 1996. Vol. 27. № 3. С. 199–204.
2. *Кыдыралиев С.К.* Преимущества метода цепочки при решении линейных дифференциальных и разностных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 16–20.
3. *Кыдыралиев С.К.* Формула решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Вестник КРСУ. 2020. Т. 20. № 8. С. 11–15.
4. *Polyanin A.D.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods and Problems / A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev // Chapman & Hall/CRC Press. Boca Raton. 2017. 1496 p.