

УДК 519.872.6:625.711.812  
DOI: 10.36979/1694-500X-2022-22-8-49-54

**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА НА ГОРНЫХ ДОРОГАХ**

*М.Т. Алсеитов, Е.А. Пасько*

*Аннотация.* Составлен алгоритм задачи пропускной способности автомобильной дороги Бишкек–Ош как одного из факторов, влияющих на безопасность движения автотранспорта. Алгоритм решения задачи представлен в виде операторной блок-схемы, которая состоит из четырех моделирующих блоков, шести логических и нескольких арифметических блоков. В результате выданы следующие характеристики: математическое ожидание, дисперсия и асимметрия, характеризующие расход различными видами автомобилей безопасного времени движения на преодоление конкретного участка АВ дороги Бишкек–Ош; аналогичные характеристики, определяющие безопасную скорость движения различных видов автомобилей на участке АВ; среднее количество обгонов, совершаемых различными типами автомобилей на участке АВ, и другие характеристики. Все перечисленные характеристики представляют собой систематическую составляющую математической модели процесса. Для каждой из них может быть вычислена случайная составляющая.

*Ключевые слова:* алгоритм; блок-схема; математическая модель; пропускная способность; скорость движения; горная дорога.

---

**ТОО ЖОЛДОРУНДА УНАА АГЫМЫНЫН КЫЙМЫЛЫНЫН  
МАТЕМАТИКАЛЫК МОДЕЛИН ИШТЕП ЧЫГУУ**

*М.Т. Алсеитов, Е.А. Пасько*

*Аннотация.* Макалада автоунаа кыймылынын коопсуздугуна таасир этүүчү факторлордун бири катары Бишкек–Ош автомобиль жолунун өткөрүү жөндөмдүүлүгү боюнча маселенин алгоритми түзүлдү. Маселени чыгаруунун алгоритми төрт моделдөөчү блоктон, алты логикалык блоктон жана бир нече арифметикалык блоктордон турган оператордук блок-схема түрүндө берилет. Натыйжада төмөнкүдөй мүнөздөмөлөр берилген: Бишкек–Ош жолунун АВ конкреттүү участогун бузууга коопсуз жүрүү убактысын автомобилдердин ар кандай түрлөрү менен сарптоону мүнөздөөчү математикалык күтүү, дисперсия жана асимметрия; АВ участогунда ар кандай типтеги унаалардын коопсуз жүрүү ылдамдыгын аныктоочу окшош мүнөздөмөлөр; АВ участогунда ар кандай типтеги машиналар тарабынан ашып өтүүлөрдүн орточо саны жана башка мүнөздөмөлөр. Бардык саналып өткөн мүнөздөмөлөр процесстин математикалык моделинин системалуу компоненти болуп саналат. Алардын ар бири үчүн кокустук компоненти эсептелиши мүмкүн.

*Түйүндүү сөздөр:* алгоритм, блок-схема, математикалык модель, өткөрүү жөндөмү; жол ылдамдыгы; тоо жолу.

---

**DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL  
OF TRAFFIC FLOW ON MOUNTAIN ROADS**

*M.T. Alseitov, E.A. Pasko*

*Abstract.* The article compiles an algorithm for the task of the Bishkek-Osh highway throughput as one of the factors affecting the safety of motor transport. The algorithm for solving the problem is presented in the form of an operator flowchart, which consists of four modeling blocks, six logic blocks and several arithmetic blocks. As a result, the following characteristics will be given: mathematical expectation, variance and asymmetry, characterizing the consumption of various types of cars of safe driving time to overcome a specific section of the Bishkek-Osh road; similar characteristics determining the safe speed of various types of cars on the AB section: the average number of overtaking made by

various types of cars on the AB section, and other characteristics. All these characteristics represent a systematic component of the mathematical model of the process. A random component can be calculated for each of them.

*Keywords:* algorithm; flowchart; mathematical model; throughput; speed; mountain road.

Метод имитационного моделирования можно использовать для определения числовых характеристик пропускной способности автомобильных дорог. Необходимость в определении пропускной способности дорог возникает при их проектировании, организации движения транспортных средств, конструирования новых видов автомобилей и, как один из факторов, влияющих на безопасность движения автомобилей, особенно на автодорогах в горной местности и, в частности, дороги Бишкек–Ош. Составим алгоритм поставленной задачи пропускной способности конкретной автомобильной дороги, как один из факторов, влияющих на безопасность движения автотранспорта. Алгоритм решения задачи представлен в виде операторной блок-схемы (рисунок 1).

Алгоритм на блок-схеме состоит из четырех моделирующих блоков, а именно (3, 4, 5 и 6), шести логических блоков (9, 15, 17, 18, 20, 22) и нескольких арифметических блоков. В предпоследнем блоке 23 выполняется осреднение и выдача результатов на печать. Работа остальных блоков такова:

- В блоке 2 записываются установленные статистическими наблюдениями параметры процесса, т. е. указанные выше начальные данные.
- В блоке 3 происходит моделирование моментов времени появления автомобилей на дороге. Это время может быть распределено по различным законам распределения случайной величины, в частности, по законам Пуассона, Эрланга, Вейбула и другими законами. Возьмем закон Пуассона, по которому появляются автомобили на участке дороги АВ.

Тогда время между двумя соседними автомобилями распределено по показательному закону:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

где  $\lambda$  – плотность распределения, в нашем случае интенсивность движения, т. е. среднее число автомобилей, появляющихся на дороге в единицу времени, например, в течение 1 часа.

Положим, что статистическими наблюдениями было установлено, что интенсивность движения составляет  $\lambda = 200$  авт/час или  $200/60 \cdot 60 = 200/3600 = 0,056$  авт/сек. Средняя скорость движения в горной местности составляет 25–30 км/час. Согласно правилам движения, расстояние между двумя очередными автомобилями на дороге, которое обеспечивает безопасное движение  $l_0$ , должно быть равно средней скорости движения, т. е. в нашем примере  $l_0 = 30$  м, это расстояние автомобиль при скорости 30 км/час преодолет за

$$t_0 = \frac{l_0}{V_0} = \frac{30 \text{ м}}{30 \text{ км/ч}} = \frac{30 \cdot 30 \cdot 30}{30 \cdot 1000} = \frac{3600}{1000} = 3,6 \text{ сек.}$$

Для моделирования времени между двумя соседними автомобилями, воспользуемся случайными числами. Случайные числа вычислялись на электронно-вычислительной машине с помощью специального алгоритма. Таблица случайных чисел имитирует различные комбинации цифр 0, 1, 2, ..., 9, извлекаемых «наудачу». В связи с тем, что числа из таблицы получены по специальному алгоритму (правилу), поэтому они являются псевдослучайными.

Ограниченность длины ячейки памяти электронно-вычислительной машины приводит к тому, что указанные числа фактически распределены по квазиравномерному закону. Поэтому они и называются псевдослучайными квазиравномерными числами [1, 2, 4, 5]. Возьмем случайные числа: 0,41; 0,21; 0,85; 0,18; и т. д. Исходя из алгоритма, при распределении Пуассона:

$$t_i = -\frac{1}{\lambda} \ln y_i.$$

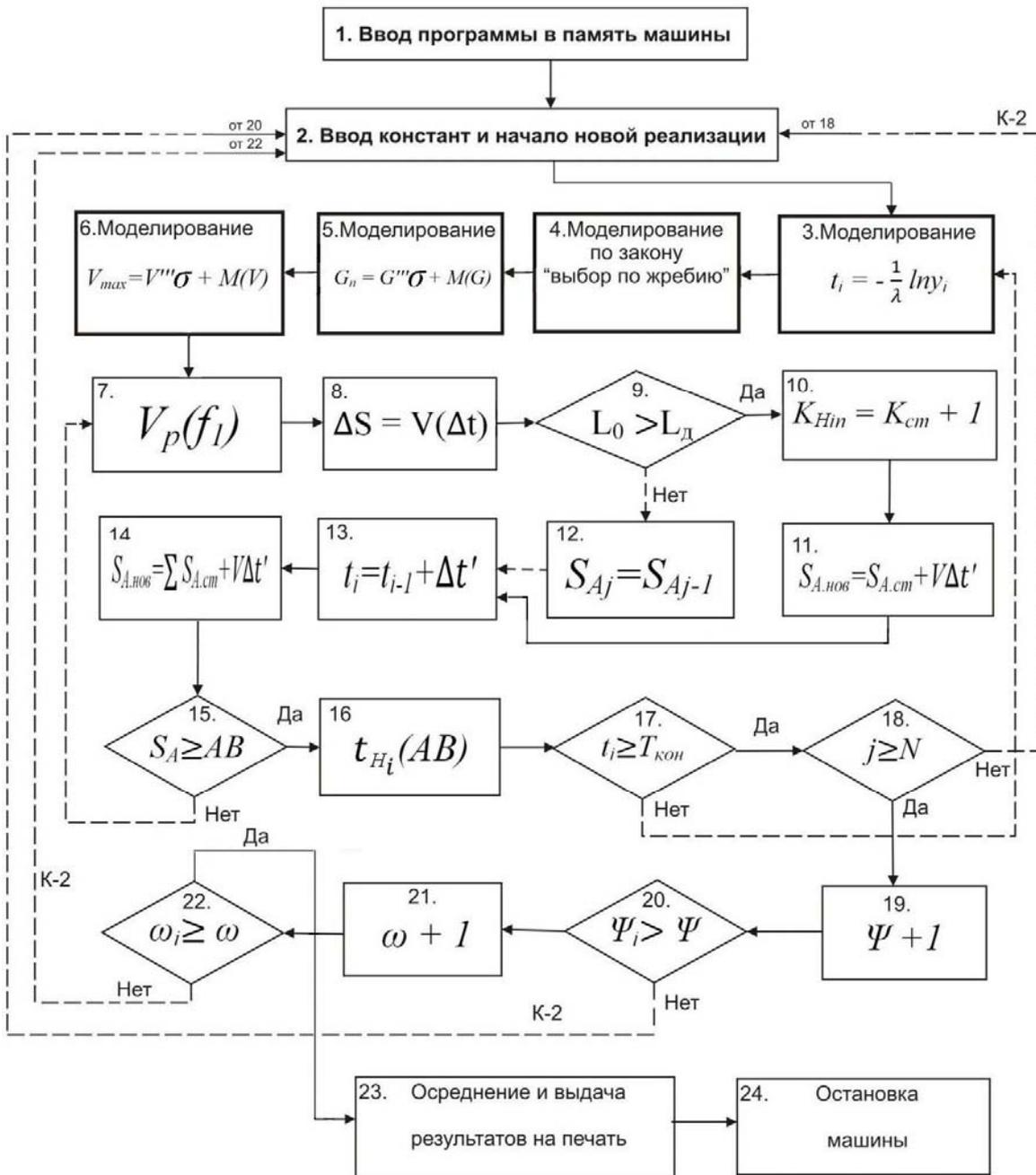


Рисунок 1 – Операторная блок-схема (алгоритм) решения задачи по определению числовых характеристик пропускной способности автомобильной дороги

В частности, для первого взятого случайного числа, имеем:

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} y_1 = -\frac{1}{0,056} \ln(0,41) = -\frac{2,3 \lg(0,41)}{0,056} = -\frac{2,3(-0,39)}{0,056} = \frac{0,897}{0,056} = 16 \text{ сек.}$$

Так же и для всех последующих реализаций при выбранных случайных числах. Результаты поместим в таблицу 1. По строке 6 таблицы 1 проверяется соблюдение необходимого интервала безопасности движения минимального интервала  $t_0$  между двумя соседними автомобилями. В нашем примере имеем нарушение в третьей реализации ( $t_3 = 2,9$  с). В строке 7 таблицы 1 исправляем промоделированные моменты появления автомобилей на дороге. В таком порядке для заданных условий моделируется одна реализация за другой. Все результаты меньше  $t_i = 3,6$  с, исправляем при вычислении по блок-схеме.

➤ В блоке 4 происходит моделирование типа автомобиля, появляющегося на дороге. Для решения этой задачи используется процедура «выбор по жребию». Порядок осуществления этой процедуры таков. Допустим, в результате статистических наблюдений был установлен в составе потока автомобилей, движущихся по дороге, процентный состав типов автомобилей, указанных в таблице 2.

Это дает возможность моделировать типы автомобилей, появившихся на дороге. Для этого используем случайные числа Т. Ома, применяем равномерный закон распределения случайной величины для решения поставленной задачи, поэтому используем случайные числа, распределенные по квазиравномерному закону, которые называются псевдослучайными квазиравномерными числами. Числа берем из [3] (таблица 14, с. 96, 3-я строка [ $0 < y_i < 1$ ]). Порядок моделирования указан в таблице 3.

Таблица 1 – Моделирование по закону Пуассона случайных чисел – промежутков времени между двумя соседними автомобилями, пользующимися на дороге с учетом интервала безопасности движения

| 1 | Номер реализации   | 1     | 2     | 3     | 4     |
|---|--|-------|-------|-------|-------|
| 2 | $0 \leq \bar{y}_i \leq 1$  | 0,41  | 0,21  | 0,85  | 0,18  |
| 3 | $\lg \bar{y}_i$  | -0,39 | -0,68 | -0,07 | -0,74 |
| 4 | $\ln y_i = 2,3 \lg \bar{y}_i$  | -0,90 | -1,57 | -0,16 | -1,7  |
| 5 | Время в секундах $t_i = -\frac{2,3}{0,056} \lg \bar{y}_i$                        | 16    | 27    | 2,9   | 30    |
| 6 | Проверка на соблюдение необходимого интервала безопасного движения $t_0 = 0,9$ с | Да    | Да    | Нет   | Да    |
| 7 | Направление полученных результатов моделирования и их выдача на печать           | 16    | 27    | 3,6   | 30    |

Таблица 2 – Процентный состав или доля автомобилей, движущихся по дороге Бишкек–Ош на участке АВ

| Параметры   | Тип автомобиля         |                    |                        |                    |
|---|------------------------|--------------------|------------------------|--------------------|
|   | легковые отечественные | легковые импортные | грузовые отечественные | грузовые импортные |
| Номер автомобиля  | 1                      | 2                  | 3                      | 4                  |
| Доля данного типа автомобилей в общем потоке, %                                 | 22                     | 40                 | 23                     | 15                 |
| Доля данного типа автомобилей, выраженная в сотых, от всего состава автомобилей | От 0,00 до 0,22        | От 0,22 до 0,62    | От 0,62 до 0,85        | От 0,85 до 1,00    |

Таблица 3 – Моделирование с использованием процедуры «выбор по жребию» типа автомобиля, появившегося на участке АВ дороги Бишкек–Ош

| Номер реализации   | 1    | 2    | 3    | 4    |
|--|------|------|------|------|
| $0 \leq y_i \leq 1$                                      | 0,41 | 0,68 | 0,64 | 0,21 |
| Номер автомобиля, отвечающий процедуре «выбор по жребию» | 2    | 3    | 3    | 1    |

В таком порядке для заданных условий моделируется одна реализация за другой, определяющие тип появившегося автомобиля.

- В блоке 5 идет моделирование по нормальному закону распределения случайной величины, а именно:  $x_i = \sigma(x) \cdot \text{rand}() + M(x)$ , для массы автомобиля с грузом, отвечающего данному типу автомобиля. Поясним это более подробно. Статистическими наблюдениями, проведенными на участке АВ, было установлено, что полная масса автомобиля с грузом может быть распределена по нормальному закону:

$$f(G_n) = \frac{1}{\sigma(G_n)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(G_n - \bar{G}_n)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $\bar{G}_n$  и  $\sigma(G_n)$  – соответственно среднее значение полной массы автомобиля, и среднее квадратическое отклонение этой массы.

Следовательно, моделирование полной массы автомобиля с грузом может производиться в соответствии с указанным выше алгоритмом:

$$G_n = \sigma(G_n) \cdot \text{rand}() + \bar{G}_n.$$

Полученные реализации полной массы автомобиля с грузом дают возможность для моделирования скорости автомобиля.

- В блоке 6 реализуется моделирование скорости движения автомобиля, т. к. скорость движения автомобиля есть величина случайная и в каждый момент времени может иметь различные значения, и ее можно описывать (задать) дифференциальными уравнениями баланса сил, действующих на автомобиль, т. е. скорость автомобиля есть функция, зависящая от многих переменных. Поэтому решение дифференциальных уравнений для каждого момента времени является довольно трудоемкой и громоздкой задачей. Статистическими наблюдениями было установлено, что скорость движения автомобиля можно считать распределенной по нормальному закону:

$$f(V) = \frac{1}{\sigma(V)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V_i - \bar{V})^2}{2\sigma^2}},$$

где  $\bar{V}$  и  $\sigma(V)$  – соответственно среднее значение скорости автомобиля и среднее квадратическое отклонение.

Это позволяет моделировать частные значения скорости движения автомобиля с помощью алгоритма для нормального закона:

$$V_i = \sigma(V) \cdot \text{rand}() + \bar{V},$$

где  $\bar{V}$  – математическое ожидание скорости автомобиля.

- В блоке 7 определяем физическую скорость движения автомобиля с учетом дорожных знаков и впереди идущего автомобиля.

- В блоке 8 определяем перемещение автомобиля за отрезок времени  $\Delta t$ .
- В блоке 9 проверяем условие возможности обгона впереди идущего автомобиля, сравниваем типы обгоняющего и обгоняемого автомобилей.
- В Блоке 10 учитываем число обгонов по каждому типу автомобилей.
- В блоке 11 происходит обгон впереди идущего автомобиля, и вычисляются координаты данного автомобиля, отвечающие моменту времени конца обгона.
- В блоке 12 производим уменьшение скорости данного автомобиля до скорости впереди идущего автомобиля, и определяем координаты автомобиля.
- В блоке 13 реализуем операцию перехода к следующему моменту времени.
- В блоке 14 определяем новые координаты автомобиля с нарастающим значением отрезков времени  $\Delta t$ .
- В блоке 15 проверяем условия на прибытие автомобиля в конечный пункт В.
- В блоке 16 фиксируем время, расходуемое данным автомобилем на весь отрезок дороги АВ.
- В блоке 17 проверяем условие на окончание моделирования одного рабочего дня. После выполнения заданного числа реализаций, например, после 1000 проигрышей, в блоке 18 будет выдан сигнал «Да». Тогда управление программой будет передано в блок 19, в котором будет изменена полосность дороги (однополосная, двухполосная и т. п.).
- В блоке 20 проверяем, все ли варианты полосности дороги рассмотрены.
- В блоке 21 будет изменено качество покрытия дороги (асфальт, гравий и т. п.).
- В блоке 22 проверяем условие, все ли виды покрытия дороги рассмотрены.
- В блоке 23 будут усреднены результаты моделирования по всем 1000 реализациям и будут выданы следующие характеристики: математическое ожидание, дисперсия и асимметрия, характеризующие расход различными видами автомобилей безопасного времени движения на преодоление конкретного участка АВ дороги Бишкек–Ош; аналогичные характеристики, определяющие безопасную скорость движения различных видов автомобилей на участке АВ: среднее количество обгонов, совершаемых различными типами автомобилей на участке АВ, и другие характеристики.

**Выводы.** Все перечисленные характеристики представляют собой систематическую составляющую математической модели процесса. Для каждой из них может быть вычислена случайная составляющая. Рассмотренная блок-схема решения задачи по определению пропускной способности автомобильной дороги является укрупненной, т. е. схематической. В реальной действительности необходимо составлять более детальную блок-схему, а, значит, более громоздкую по сравнению с выше составленной блок-схемой.

Поступила: 13.06.22; рецензирована: 23.06.22; принята: 27.06.22.

#### *Литература*

1. Гельгор А.Л. Методы моделирования случайных величин и случайных процессов: учеб. пособие / А.Л. Гельгор, А.И. Горлов, Е.А. Попов. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 217 с.
2. Горностаева Т.Н. Математическое и компьютерное моделирование: учеб. пособие / Т.Н. Горностаева, О.М. Горностаев. М.: Мир науки, 2019. 122 с.
3. Заводский Ю.В. Методика статистической обработки экспериментальных данных / Ю.В. Заводский. М.: МАДИ, 1973. 98 с.
4. Звонарев С.В. Основы математического моделирования: учеб. пособие / С.В. Звонарев. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. 112 с.
5. Косоруков О.А. Модели исследования операций: учебник / О.А. Косоруков, М.А. Халиков, Г.П. Фомин. М.: РУСАЙНС, 2019. 190 с.