УДК 517.96:577.3
DOI: 10.36979/1694-500X-2023-23-4-11-20

РАЗРАБОТКА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева

Аннотация. Изучен процесс распространения нервного импульса по нервному волокну в одномерном случае, который описывается параболическим уравнением, и с использованием преобразования Лапласа приведено к гиперболическому уравнению. Рассматривается обобщенная обратная задача с дельта-функцией Дирака и тета-функцией Хевисайда, т. е. восстановлению неизвестных коэффициентов уравнения. С применением метода характеристики и метода выделения особенностей обратная гиперболическая задача приводится к обратной задаче с данными на характеристиках. А к последней задаче применен конечно-разностный метод и проведена регуляризация решения обратной задачи. Получено регуляризованное решение неизвестного коэффициента, и оно является регуляризованным решением обратной задачи параболического типа. Получена оценка сходимости и показана сходимость регуляризованного решения обратной задачи к точному решению.

Ключевые слова: одномерная обратная задача; нервный импульс; нервное волокно; процесс распространения; конечно-разностное регуляризованное решение; преобразование Лапласа; метод особенности характеристик; сходимость решения.

НЕРВ ИМПУЛЬСУНУН НЕРВ ТАЛЧАСЫ БОЮНЧА ТАРАЛУУ ПРОЦЕССИНИН БИР ӨЛЧӨМДҮҮ ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН ЖӨНГӨ САЛЫНГАН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ИШТЕП ЧЫГУУ

А.Дж. Сатыбаев, Г.С. Курманалиева

Аннотация. Макалада нерв импульсунун нерв талчасы боюнча таралуу процесси бир өлчөмдүү жагдайда изилденип, ал параболалык теңдеме менен сүрөттөлөт жана Лаплас трансформациясын колдонуу менен гиперболалык теңдемеге келтирилет. Дирак дельта функциясы жана Хевисайд тета функциясы менен жалпыланган тескери маселе каралат, б. а. теңдеменин белгисиз коэффициенттерин калыбына келтирүү. Мүнөздөмө ыкмасын жана өзгөчөлүктөрдү тандоо ыкмасын колдонуу менен, тескери гиперболалык маселе мүнөздөмөлөрдөгү маалыматтар менен тескери маселеге келтирилет. Ал эми акыркы маселеге чектүү айырмачылык ыкмасы колдонулуп, тескери маселенин чыгарылышы жөнгө салынды. Белгисиз коэффициенттин жөнгө салынган чечими алынды жана ал параболикалык типтеги тескери маселенин жөнгө салынган чечими болуп саналат. Жакындаштырууга баа берилди жана так чыгарылышка тескери маселенин жөнгө салынган чыгарылышынын жакындыгы көрсөтүлдү.

Түйүндүү сөздөр: бир өлчөмдүү тескери тапшырма; нерв импульсу; нерв талчасы; жайылуу процесси; акыркы-ар түрдүү жөнгө салынган чечим; Лаплас трансформациясы; мүнөздөмөлөрдүн өзгөчөлүгү ыкмасы; чыгарылыштын жакындыгы.

DEVELOPMENT OF A REGULARIZED SOLUTION TO A ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM THE PROCESS OF PROPAGATION OF A NERVE IMPULSE ALONG A NERVE FIBER

A.Dzh. Satybaev, G.S. Kurmanalieva

Abstract. This article studies the process of propagation of a nerve impulse along a nerve fiber in a one-dimensional case. The process is described by a parabolic equation and using the Laplace transform is reduced to a hyperbolic equation. We consider a generalized inverse problem with the Dirac delta function and the Heaviside theta function, i.e. recovery of unknown coefficients of the equation. Using the characteristic method and the singularity extraction method, the inverse hyperbolic problem is reduced to the inverse problem with data on characteristics. A finite difference method is applied to the last problem and the solution of the inverse problem is regularized. A regularized solution of the unknown coefficient is obtained and it is a regularized solution of the inverse problem of parabolic type. A convergence estimate is obtained and the convergence of the regularized solution of the inverse problem to the exact solution is shown.

Keywords: one-dimensional inverse problem; nerve impulse; nerve fiber; propagation process; finite-difference regularized solution; Laplace transform; method of characteristic features; convergence of the solution.

Введение. В работе И.Т. Селезова и Л.В. Морозова [1] представлено обобщение задачи о распространении нервного возбуждения в рамках модели Ходжкина–Хаксли. Получено точное аналитическое решение задачи на основе интегрального преобразования Лапласа и теоремы Эфроса в случае, когда входной (начальный) импульс возбуждения отклоняется от ступенчатой функции Хевисайда.

Проведен сравнительный анализ расчетов с результатами, полученными ранее для случая возбуждающей функции Хевисайда.

Подробно проанализировано влияние отклонения при приближении к решению, соответствующему функции Хевисайда.

В статье В.С. Новоселова [2] предложено физическое доказательство применимости уравнения Кортевега-де Фриса для описания распространения нервного импульса в немиелинизированном нервном волокне. Построено моделирование нервного импульса с помощью трех кусочно-линейных моделей: упрощенной модели, имитационной модели Фитц Хью-Нагумо и модели Ходжкина–Хаксли.

В работе В.С. Новоселова [3] разработана математическая модель возбуждения клеток миокарда с учетом структуры бегущего импульса и кинетических уравнений мышечного сокращения. Предлагаемая модель качественно правильно отвечает основным нюансам физиологической задачи по управлению автоволновым процессом сердечного возбуждения.

В работе Ю.Н. Зайко [4] рассмотрено распространение сигналов в нервном волокне с учетом омических потерь и тепловых процессов. В данной работе исследованы решения полученных уравнений типа бегущей волны, получен интеграл и точное решение данной системы уравнений, а также численно исследованы эти решения.

Распределение мембранного потенциала по нервному волокну описывается телеграфным уравнением. Выводим это уравнение.

Пусть нервное волокно имеет длину l и радиус r. Так как волокно имеет цилиндрический вид, то градиент потенциала будет:

$$grad\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right),$$

где ϕ – потенциал мембраны; z – цилиндрическая координата; ρ – расстояние; φ – угол. Используя закон Кирхгофа и цилиндрическое приближение, получим:

$$-S_1 j_{1z} + S_2 j_{2z} + S_{бок} j = 0, \; S_{бок} = 2\pi rl, \; S_1 = 2\pi r^2,$$

где j, j_{1z}, j_{2z} – токи, переходящие через участки в начале и в конце волокна.

Используя ряд Тейлора, получим 1-приближение:

$$j_{2z} = j_{1z} + l\,\frac{\partial j_{1z}}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - l\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Подставляя в приближение, получим:

$$\pi r^2 \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} l \right) \right) = 2\pi r l j.$$

Полный ток через мембрану равен:

$$j = j_c + j_r = C_m \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\phi}{r_m}.$$

Тогда $\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = C_m \frac{\partial \phi}{\partial t} + \bar{g}_k (\phi - \phi_k) n^4 + \bar{g}_{NA} (\phi - \phi_{NA}) m^3 h + g_e (\phi - \phi_e)$ – телеграфное уравнение. Здесь C_m – емкость мембраны; I – ионный ток, который состоит из натриевого, калиевого и тока утечки.

Быстрое обратимое изменение мембранного потенциала в процессе возбуждения нервного волокна называется потенциалом действия. Перемещение потенциала действий основано на поперечной диффузии натриевого и калиевого ионов, проходящей через мембраны нервного волокна. При этом создаются локальные токи, являющиеся движущей силой распространения потенциала действий.

Актуальность. В настоящее время многие люди болеют неврологическими заболеваниями и во многих случаях они вынуждены лечиться с помощью медицинских аппаратов. Большинство из этих устройств оказывают положительное действие на нервные волокна людей с помощью определенных импульсов с заданными медицинскими характеристиками и способствуют восстановлению нервной системы людей. Поэтому изучение процесса распространения нервных импульсов (потенциала действий) имеет большое значение в медицинской практике.

Для этого необходимо определить параметры уравнения, описывающего процесс распространения потенциала действий по нервному волокну, такие как: $C_m(x)$ – емкость на единицу площади мембраны; $r_a(x)$ – радиус нервного волокна; $\rho_m(x)$ *и* $\rho_a(x)$ – удельные сопротивления; l – толщина мембраны.

Такие задачи называют обратными задачами. Представленная работа посвящена разработке регуляризованного решения одномерной обратной поставленной задачи.

Постановка задачи. Процесс распространения нервного импульса по нервному волокну в одномерном случае описывается телеграфным уравнением параболического вида [5, 6]:

$$C_m(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{u(x,t)}{\rho_m(x) \cdot l}, \quad x \in R_+,\ t \in R_+, \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – внутриклеточный потенциал действий; $\rho_m(x)$, $\rho_a(x)$ – удельное сопротивление плазмы и нервного волокна; $r_a(x)$ – радиус нервного волокна; $C_m(x)$ – емкость на единицу площади мембраны; l – толщина мембраны; a, m – индексы аксоны (нервного волокна) и мембраны.

Обратная параболическая задача заключается в определении параметров $r_a(x)/\rho_a(x)/\rho_m(x)/C_m(x)$ при заданных начальных и граничных условиях вида:

$$u(x,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \quad u_x(x,t)\big|_{x=0}\ h_0\theta_0(t) + r_0\theta_1(t) + \rho_0\theta_2(t), \quad t \in R_+, \tag{2}$$

где h_0, r_0, ρ_0 – положительно-постоянные; $\theta(t)$ – тета-функция Хевисайда, $\theta_1(t) = t\theta(t)$, $\theta_2(t) = \dfrac{t^2}{2}\theta(t)$, а также при заданной дополнительной информации в виде:

$$u(x,t)\big|_{x=0} = g(t),\ t \in [0, 2T], \tag{3}$$

где T – положительно-постоянное число.

Используем преобразование Лапласа [7] к решению задачи (1)–(3), т. е.

$$u(x,t) = \int_0^\infty V_t(x,\tau)G(t,\tau)d\tau = \int_0^\infty V(x,\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau, \tag{4}$$

где $G(t,\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{\tau^2}{4t}}$ – функция Грина.

Тогда для функции $V(x,t)$ из (1)–(3) получим следующую задачу:

$$C_m(x)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} = \frac{r_a(x)}{2\rho_a(x)}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - \frac{V(x,t)}{\rho_m(x)\cdot l}, \quad (x,t) \in R_+^2, \tag{5}$$

$$V(x,t)\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = ho\delta(t) + r_0\theta(t) + \rho_0\theta_1(t), \quad t \in R_+, \tag{6}$$

$$V(x,t)\big|_{x=0} = f(t), \quad t \in [0, 2T]. \tag{7}$$

Здесь $f(t) = \int_0^\infty g(\tau)G_{tt}(t,\tau)d\tau.$

Одномерная обратная гиперболическая задача заключается в определении неизвестных параметров: $C_m(x)/r_0(x)/\rho_0(x)/\rho_m(x)$ и $V(x,t)$ из задачи (5)–(7).

Предположим, что относительно неизвестных коэффициентов выполнено условие:

$$C_m(x), r_a(x), \rho_a(x), \rho_m(x) \in \Lambda_0. \tag{8}$$

Здесь $\Lambda_0 = \{C_m(x) \in C^6(R_+),\ (C_m(x))_x^{'}\big|_{x=0} = 0,$

$0 < M_1 \le C_m(x) \le M_2,\ \|C_m(x)\| C^2(R_+) < M_3\}$ M_1, M_2, M_3 – положительные постоянные.

Введем обозначения: $\bar{C}^2(x) = \dfrac{r_a(x)}{2C_m(x)\rho_a(x)}$, $\bar{d}(x) = \dfrac{1}{\rho_m(x)\cdot C_m(x)\cdot l}$, тогда уравнение (5) примет вид:

$$V_{tt}^{''}(x,t) = \bar{C}^2(x)V_{xx}^{''}(x,t) - V(x,t)\cdot\bar{d}(x), \quad (x,t) \in R_+^2. \tag{9}$$

Метод выпрямления характеристики. Введем новую переменную (метод Эйконала):

$$z(x) = \int_0^x \frac{1}{\bar{C}(\lambda)}d\lambda,\ z(x) > 0,\ \lim_{x\to\infty} z(x) = 0, \tag{10}$$

и введем новые переменные:

$$C(z(x)) = \bar{C}(x),\quad d(z(x)) = \bar{d}(x),\ U(z(x),t) = V(x,t).$$

Беря первую и вторую производные функции $V(x,t)$ относительно новой функции $U(z(x),t)$, и подставляя эти производные в уравнение (9), получим новую обратную задачу относительно новой функции $[8]$:

$$U''_{tt}(z,t) = U''_{zz}(z,t) - \frac{C'(z)}{C(z)} U_z(z,t) - d(z)U(z,t), \quad z \in R_+, \quad t \in R_+, \tag{11}$$

$$U(z,t)\big|_{t<0} \equiv 0, \quad U'_z(z,t)\big|_{z=0} = C(0)\left[h_0\delta(t) + r_0\theta(t) + \rho_0\theta_1(t)\right], \quad t \in R_+, \tag{12}$$

$$U(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \quad t \in [0,2T]. \tag{13}$$

Здесь обратная задача заключается в определении функции $C(z)/d(z)$ и $U(z,t)$.

Так как дополнительная информация задачи задана на промежутке $[0,2T]$ и ограниченность задаваемых коэффициентов задачи можно рассматривать в области:

$$\Delta(2T) = \left\{(z,t) : z \in [0,T], \quad T - z < t < T + z\right\}.$$

Метод выделения особенностей. Решение прямой задачи (11)–(12) представим из сингулярной и регулярной части по методике В.Г. Романова $[9]$:

$$U(z,t) = \tilde{U}(z,t) + S(z)\theta(t-|z|) + R(z)\theta_1(t-|z|). \tag{14}$$

Беря первые и вторые производные по x,t от формулы (14), и подставляя их в уравнение (11), а также сокращая одинаковые члены и собирая их при одинаковых $\delta(t), \theta(t), \theta_1(t)$, и приравнивая их суммы к нулю, получим $[8]$:

$$U''_{tt}(z,t) = U_{zz}(z,t) - 2\frac{S'(z)}{S(z)} U_z(z,t) - d(z)U(z,t), \quad (z,t) \in \Delta(2T), \tag{15}$$

$$U(z,t)\big|_{t=z} = S(z), \ z \in [0,T], \tag{16}$$

$$U(z,t)\big|_{z=0} = f(t), \ t \in [0,2T]. \tag{17}$$

Обратная задача (15)–(17) называется обратной задачей с данными на характеристиках, в которой должны определяться функции $S(z)/d(z)$ и $U(z,t)$. Определив $S(z)/d(z)$ и $U(z,t)$ из задачи (15)–(17), мы можем определить и другие неизвестные функции.

Здесь $S(z)$ и $C(z)$ связаны соотношением:

$$S(z) = \sqrt{C(z)} \text{ или } C(z) = S^2(z), \ \text{ т. е. } \ \frac{ra(z)}{2C_m(z)\rho_a(z)} = S^2(z).$$

Из этой формулы можно определить одну из неизвестных функций:

$$r_a(z) = S^2(z) \cdot 2C_m(z)\rho_a(z), \tag{18}$$

$$\rho_a(z) = \frac{r_a(z)}{S^2(z)2C_m(z)}. \tag{19}$$

А для определения функции $C_m(z), \rho_m(z)$ нужно определить функцию $d(z)$.

Для этого используем производные по z и по t на характеристиках, т. е.

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=z} = S_z'(z) + R(z), \qquad \left.\frac{\partial U(z,t)}{\partial z}\right|_{t=z} = -Sign R(z).$$

Из формулы (16) имеем:

$$\left.\frac{\partial U(z,t)}{\partial z}\right|_{t=z} = S_z(z). \tag{20}$$

Тогда из предыдущих формул и из (20) следует, что

$$S'(z) = R(z). \; S''(z) = R'(z). \tag{21}$$

Известно, что приравнивая к нулю суммы членов при одинаковых особенностях:

$$\delta(t-|z|) : 2S'(z) - \frac{C_Z'(z)}{C(z)} S(z) = 0,$$

$$\theta(t-|z|) : S_{zz}''(z) - 2R_z'(z) - \frac{C'(z)}{C(z)} S'(z) + \frac{C'(z)}{C(z)} R(z) - d(z) S(z) = 0,$$

$$\theta_1(t-|z|) : R_{zz}''(z) - \frac{C_Z'(z)}{C(z)} R_z'(z) - d(z) R(z) = 0.$$

Подставляя (21) во второе уравнение, имеем:

$$S_{zz}''(z) - 2S_{zz}''(z) - \frac{C'(z)}{C(z)} S'(z) + \frac{C'(z)}{C(z)} S_z'(z) - d(z) S(z) = 0,$$

$$d(z) = -S_{zz}''(z) / S(z).$$

По обозначению $d(z) = \dfrac{1}{\rho_m(z) \cdot C_m(z) \cdot l}$.

Тогда из последних двух уравнений получим:

$$\frac{1}{\rho_m(z) C_m(z) \cdot l} = -\frac{S''(z)}{S(z)}.$$

Отсюда можем найти неизвестную $\rho_m(z)$:

$$\rho_m(z) = -S(z) / \left[C_m(z) \cdot l \cdot S''(z)\right]. \tag{22}$$

Из формул (18) и (22) следует:

$$2C_m(z) \rho_a(z) S^2(z) - r_a(z) = 0,$$

$$C_m(z) \rho_m(z) \cdot l \cdot S''(z) + S(z) = 0.$$

Первое уравнение умножаем на $\rho_m(z) \cdot l \cdot S''(z)$, а второе – на $\rho_a(z) S^2(z)$, тогда получим:

$$2C_m(z) \rho_a(z) S^2(z) \cdot \rho_m(z) \cdot l \cdot S''(z) - r_a(z) \rho_m(z) l \cdot S''(z) = 0.$$

$$C_m(z) \rho_a(z) S^2(z) \rho_m(z) \cdot l \cdot S''(z) + \rho_a(z) \cdot S^3(z) = 0.$$

Отнимая из первого уравнения второе уравнение, получим:

$$C_m(z)\rho_a(z)S^2(z)\rho_m(z)\cdot l\cdot S''(z)-r_a(z)\rho_m(z)\cdot l\cdot S''(z)-\rho_a(z)S^3(z)=0\,.$$

Разделив последнее уравнение на $\rho_a(z)S^2(z)\rho_m(z)lS''(z)$, находим неизвестную функцию $C_m(z)$:

$$C_m(z)=\frac{r_a(z)}{\rho_a(z)S^2(z)}+\frac{S(z)}{\rho_m(z)lS''(z)}\,. \tag{23}$$

Конечно-разностное решение обратной задачи (15)–(17). Для решения обратной задачи конечно-разностным методом, введем сеточную область, следуя $[10]$:

$$\Delta_h(T)=\{z_i=ih,\ t_k=kh,\ i=\overline{0,N},\ k=\overline{0,\ 2N},\ ih<\tau k<2T-ih\}, \tag{24}$$

где h – шаг сетки по z,t. Разностная обратная задача имеет вид:

$$U_{t\bar t}=U_{z\bar z}-2\frac{S_i-S_{i-1}}{hS_i}\left[\frac{U_i^k-U_{i-1}^k}{h}\right]-d_iU_i^k,\ (z_i,t_k)\in\Delta_h(T), \tag{25}$$

$$U_i^i=S_i,\ i=\overline{0,N}, \tag{26}$$

$$U_0^k=f^k,\ k=\overline{0,2N}\,. \tag{27}$$

Теорема 1. Пусть решение дифференциальной задачи (15)–(16) существует и $U(z,t)\in C^4(\Delta(T))$. Пусть выполнены условия (8), (10). Тогда конечно-разностное решение разностной обратной задачи (25)–(27) сходится к точному решению дифференциальной обратной задачи (15)–(17) со скоростью порядка $O(h)$, и имеется оценка сходимости:

$$\bar U^{k+1}\le O(h)\exp\left[2\frac{\bar S}{\underline{S}}+h^2\bar d\right], \tag{28}$$

где $\bar U^{k+1}$, $\bar S$, $\underline{S}$, $\bar d$ – верхние и нижние нормы функций сеточных функций: U_i^k, S_i, d_i.

Доказательство о сходимости теоремы 1 можно найти в $[11]$.

Конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи (15)–(17). Пусть дополнительная информация обратной задачи задана с погрешностью ε, т. е. задано:

$$\left|f(t)-f^\varepsilon(t)\right|<\varepsilon,\ \varepsilon \text{ – малое число.} \tag{29}$$

Тогда решение обратной задачи $\left(\tilde S_i,\tilde U_i^k\right)$ имеет регуляризованный вид формулы Даламбера (см. $[11]$):

$$\tilde U_{i+1}^{k,\varepsilon}=\frac{f^{k+i+1,\varepsilon}+f^{k-i-1,\varepsilon}}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}\frac{2\left(S_\mu^\varepsilon-S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{hS_\mu}*$$

$$*\left[\tilde U_\mu^{k-i-\mu+2\rho,\varepsilon}-\tilde U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\rho,\varepsilon}\right],\quad i=\overline{1,N-1},\quad k=\overline{i,2N-i}, \tag{30}$$

$$\tilde S_{i+1}^\varepsilon=\frac{f^{2i+1,\varepsilon}+f^{0,\varepsilon}}{2}+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{p}d_\mu^\varepsilon\cdot\left[\tilde U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon}-U_{\mu-1}^{-\mu+2p+1,\varepsilon}\right],\ i=\overline{1,N-1},\quad k=\overline{i,2N-i}. \tag{31}$$

Такую же формулу можно получить и для U_{i+1}^{k}, S_i для решения разностной обратной задачи (15)–(17). Отнимая эти решения друг от друга, имеем (см. [11]):

$$\hat{U}_i^{k+1} = U_i^{k+1} - \tilde{U}_i^{k+1,\varepsilon} = \frac{f^{k+i+1} - f^{k+i+1,\varepsilon} + f^{k-i-1} - f^{k-i-1,\varepsilon}}{2} +$$

$$+h\sum_{p=1}^{i}\sum_{\mu}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu - S_{\mu-1}\right)}{hS_\mu}\left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}}\right] - -h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mathrm{P}=1}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu^\varepsilon - S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{hS_\mu^\varepsilon}\left[\tilde{U}_\mu^{k-i-1+2\mathrm{P},\varepsilon}\tilde{U}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P},\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{f^{k+i+1} - f^{k+i+1,\varepsilon} + f^{k-i-1} - f^{k-i-1,\varepsilon}}{2} + +h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu - S_{\mu-1}\right)}{hS_\mu}\left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}}\right] -$$

$$-h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu^\varepsilon - S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{hS_\mu^\varepsilon}\left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}}\right] - -h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu^\varepsilon - S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{hS_\mu^\varepsilon}\left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}}\right] -$$

$$-h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} \frac{2\left(S_\mu^\varepsilon - S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{hS_\mu^\varepsilon}\left[\tilde{U}_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P},\varepsilon} - \tilde{U}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P},\varepsilon}\right] = = \frac{f^{k+i+1} - f^{k+i+1,\varepsilon} + f^{k-i-1} - f^{k-i-1,\varepsilon}}{2} +$$

$$+\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}}\left[\frac{2\left(S_\mu - S_{\mu-1}\right)}{S_\mu} - \frac{2\left(S_\mu^\varepsilon - S_{\mu-1}^\varepsilon\right)}{S_\mu^\varepsilon}\right] * \left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}}\right] +$$

$$+\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}}\left[\frac{S_\mu^\alpha - S_{\mu-1}^\varepsilon}{S_\mu^\varepsilon}\right] * \left[U_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - \tilde{U}_\mu^{k-i-\mu+2\mathrm{P},\varepsilon} + +\left(U_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P}} - \tilde{U}_{\mu-1}^{k-i-\mu+2\mathrm{P},\varepsilon}\right)\right],\ i = \overline{1, N-1}. \qquad (32)$$

$$\hat{S}_{i+1} = \tilde{S}_{i+1} - \tilde{S}_i = \frac{f^{2i+2} - f^{2i+2,\varepsilon} + f^0 - f^{0,\varepsilon}}{2} + +h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_r\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}\right] -$$

$$-h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu^\varepsilon\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon} - U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{f^{2i+2} - f^{2i=2,\varepsilon} + f^0 - f^{o,\varepsilon}}{2} + h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}\right] -$$

$$-h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu^\varepsilon\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}\right] + h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu^\varepsilon\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}\right] -$$

$$-h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu^\varepsilon\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{f^{2i+2} - f^{2i+2,\varepsilon} + f^0 - f^{0,\varepsilon}}{2} + h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}}\left[d_\mu - d_\mu^\varepsilon\right] * \left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}\right] +$$

$$+h\sum_{\mathrm{P}=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\mathrm{P}} d_\mu^\varepsilon\left[U_\mu^{-\mu+2\mathrm{P}+1} - U_\mu^{-2\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon} - \left(U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1}U_{\mu-1}^{-\mu+2\mathrm{P}+1,\varepsilon}\right)\right],\ i = \overline{1, N-1}. \qquad (33)$$

Если ввести обозначения:

$\bar{Z}_i = \max\limits_{K=\overline{i,2N-i}}\left|U_i^K\right|$, $\bar{S}_i = \max\limits_{i=\overline{0,N}}\left|S_i\right|$, $\underline{S_i} = \min\limits_{i=\overline{0,N}}\left|S_i\right|$, то из (32) и (33) получим оценки:

$$\hat{Z}_{i+1} \le \varepsilon + 8N\varepsilon \sum_{\mathrm{P}=1}^{i} \frac{\overline{S}_{\mathrm{P}}}{\underline{S}_{\mathrm{P}}} Z_{\mathrm{P}}^{\varepsilon} + 8N\varepsilon \sum_{\mathrm{P}=1}^{i} \frac{\overline{S}_{\mathrm{P}}}{\underline{S}_{\mathrm{P}}} Z_{\mathrm{P}}^{\varepsilon}, \tag{34}$$

$$\hat{S}_{i+1} \le \varepsilon + 8N\varepsilon \sum_{\mathrm{P}=1}^{i} \frac{\overline{S}_{\mathrm{P}}}{\underline{S}_{\mathrm{P}}} Z_{\mathrm{P}}^{\varepsilon} + 8N\varepsilon \sum_{\mathrm{P}=1}^{i} \frac{\overline{S}_{\mathrm{P}}}{\underline{S}_{\mathrm{P}}} Z_{\mathrm{P}}^{\varepsilon}. \tag{35}$$

Если ввести обозначения $Z_i = \max\left\{\hat{Z}_i, \hat{S}_i\right\}$, то из (34) и (35) следует, что

$$Z_{i+1}^{\varepsilon} \le \varepsilon + 16N\varepsilon S \cdot \sum_{\mathrm{P}=1}^{i} \bar{Z}_{\mathrm{P}}^{\varepsilon}, \; i = \overline{0, N-1}.$$

Если учтем оценки конечно-разностного решения, а также формулы Гронуолла–Беллмана, то из последней оценки имеем окончательную оценку:

$$Z_{i+1}^{\varepsilon, O(h)} \le \left(\varepsilon + O\left(h\right)\right) \exp\left(16N^2 S\right). \tag{36}$$

Теорема 2. Пусть решение прямой задачи (15)–(16) существует и $U\left(Z,t\right) \in C^4\left(\Delta\left(T\right)\right)$. Пусть выполнены условия (8), (10), а также условия (29). Тогда построенное конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи (25)–(27), учтенное условие (29) сходится к точному решению дифференциальной обратной задачи (15)–(17) со скоростью порядка $O\left(h\right)$, и имеет место регуляризованная оценка (36).

Итак, определяя конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи (15)–(17) $S_i^{\varepsilon}, i = \overline{0, N}$, мы можем определить конечно-разностное регуляризованное решение обратной задачи (11)–(13), т. е.:

$$C_i^{\varepsilon} = \left(S_i^{\varepsilon}\right)^2, \text{или } d_i^{\varepsilon} = -\frac{S_{Z\bar{Z}}^{\varepsilon,''}}{S_i}, i = \overline{0, N}.$$

Это означает, что по формулам (18), (19), (22), (23) мы можем определить конечно-разностное регуляризованное решение (11)–(13), т. е. один из неизвестных коэффициентов при известных остальных коэффициентах:

$$\left(r_a\right)_i^{\varepsilon} = \left(S_i^{\varepsilon}\right)^2 \cdot 2\left(C_m\right)_i \cdot \left(\rho_a\right)_i, i = \overline{0, N}, \tag{37}$$

$$\left(\rho_a\right)_i^{\varepsilon} = \left(r_a\right)_i \Big/ \left[\left(S_i^{\varepsilon}\right)^2 \cdot 2\left(C_m\right)_i\right], i = \overline{0, N}, \tag{38}$$

$$\left(\rho_m\right)_i^{\varepsilon} = -S_i^{\varepsilon} \Big/ \left[\left(C_m\right)_i \cdot l \cdot \left(S_i^{\varepsilon}\right)_{\bar{Z}\underline{Z}}^{''}\right], i = \overline{0, N}, \tag{39}$$

$$\left(C_m\right)_i^{\varepsilon} = \left(r_a\right)_i \Big/ \left[\left(\rho_a\right)_i \cdot \left(S_i^{\varepsilon}\right)^2\right] + S_i^{\varepsilon} \Big/ \left[\left(\rho_m\right)_i \cdot l \cdot \left(S_i^{\varepsilon}\right)_{\bar{Z}\underline{Z}}^{''}\right], i = \overline{0, N}. \tag{40}$$

Используя формулы (10) и переходя к старому переменному из (37)–(40), мы можем найти один из неизвестных регуляризованных коэффициентов обратной задачи (5)–(7).

Так как обратная гиперболическая задача (5)–(7) эквивалентна обратной задаче параболического типа (1)–(3), то найденное регуляризованное решение (5)–(7) является и регуляризованным решением обратной параболической задачи (1)–(3).

Выводы. Доказана теорема о сходимости приближенного конечно-разностного регуляризованного решения к точному решению обратной задачи процесса распространения нервного импульса по нервному волокну.

Поступила: 09.11.22; рецензирована: 23.11.22; принята: 25.11.22.

Литература

1. *Селезов И.Т.* Обобщение задачи возбуждения и распространения потенциала действия по нервному волокну / И.Т. Селезов, Л.В. Морозова // Прикладная гидромеханика. Киев, 2010. Т. 12. № 3. С. 75–83.
2. *Новоселов В.С.* К имитационному моделированию нервного импульса / В.С. Новоселов // Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2011. Вып. 4. С. 73–83.
3. *Новоселов В.С.* О математической модели возбуждения клеток сердца / В.С. Новоселов // Вестник Санкт-Петербургского ун-та. Серия 10. Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 4. С. 58–65.
4. *Зайко Ю.Н.* О распространении сигналов в нервном волокне / Ю.Н. Зайко // Известия Саратовского ун-та. Сер. Физика. Вып. 1. 2009. Т. 9. С. 33–38.
5. *Hodgkin A.L.* The electrical constants of a crustacean nerve fiber / A.L. Hodgkin, W.A. Rushton // Proc. Roy. Soc. London, 1946. Ser B.V.133. Pp. 444–479.
6. *Hodgkin A.L.* A quantative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve fiber / A.L. Hodgkin, A.F. Huxley // J. Physiol. London, 1952. V. 117. N 4. Pp. 500–544.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. Новосибирск: Сиб. научн. изд-во, 2009. С. 457 (на русском языке).
8. *Сатыбаев А.Дж.* Конечно-разностное регуляризованное решение обратных задач гиперболического типа / А.Дж. Сатыбаев. Ош, 2001. С. 143.
9. *Романов В.Г.* Устойчивость в обратных задачах / В.Г. Романов. М.: Научный мир, 2004. С. 304.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. *Сатыбаев А.Дж.* Разработка конечно-разностного регуляризованного метода решения одномерной обратной задачи геоэлектрики / А.Дж. Сатыбаев, Ю.В. Анищенко // Вестник КРСУ. Серия: Естественно-технические науки. 2019. Т. 19. № 4. С. 3–10.